Fiche méthodologique : Raisonnement par récurrence

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

2 septembre 2024

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

1 Principe du raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de montrer un ensemble de propriétés P_n avec $n \in \mathbb{N}$.
Un exemple est donné en partie 3.1 où l'ensemble des propriétés P_n correspond à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n$.

Dans l'énoncé ci-dessus il est mentionné "pour tout $n \in \mathbb{N}$'. Il n'y a donc pas *juste* une propriété P_n à montrer mais bien une multitude de propriétés P_n à montrer où n est variable. Il n'est bien entendu pas réaliste de vouloir montrer que P_0 est vraie puis P_1 puis P_2 etc. Il y a en tout une infinité de résultats à montrer. Toute la puissance du raisonnement par récurrence va nous permettre de résoudre notre problème.

Le raisonnement par récurrence se base sur le principe des dominos. En effet lorsque l'on fait tomber un domino, celui-ci entraîne tous les autres dans sa chute, potentiellement même une infinité de dominos. La chute des dominos repose sur deux principes qui seront les mêmes que le raisonnement par récurrence.

— Si un domino tombe alors il fera tomber le suivant.
— Pour qu'une réaction en chaîne s'enclenche, il faut un domino de départ qui tombe.

Pour coller à notre analogie des dominos, on considérera qu'une propriété vraie correspond à un domino tombé tandis qu'une propriété fausse correspond à un domino debout. Reprenons notre exemple mathématique et considérons les conditions suivantes.

— Pour une valeur de n donnée et fixée. Si P_n est vraie alors P_{n+1} est également vraie. (Hérédité)
— Pour qu'une réaction en chaîne s'enclenche, il faut qu'une propriété soit effectivement vraie, P_0 par exemple. (Initialisation)

Si ces deux éléments sont vérifiés, que peut-on en déduire ?

1. Par initialisation, P_0 est vraie.
2. D'après ce précède, P_0 est vraie. Par hérédité, on déduit que P_1 est vraie.
3. D'après ce qui précède, P_1 est vraie. Par hérédité, on déduit que P_2 est vraie.
4. etc.

2 Conseils / écueils à éviter

Les conseils ci-dessous sont mis en place dans la partie 3.2 si vous souhaitez avoir un exemple plus concret.

— Avant de commencer votre initialisation et votre hérédité, écrivez votre hypothèse de récurrence P_n. Dans l'exemple 3.2 on note : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence P_n : $''u_n = 2^n + n''$. Il est important de noter cela pour savoir ce que l'on veut montrer.
On remarquera que dans P_n le n est fixé.

— L'initialisation est souvent négligée et/ou mal rédigée. Prenez le temps d'indiquer ce que vous souhaiter montrer ainsi que le détail de vos calculs.

— Dans l'hérédité, on choisit un n que l'on **fixe**. La plus grande erreur possible est de supposer n variable. Si tel est le cas alors lorsque l'on suppose P_n vraie on suppose que cela est vrai pour tout n. N'est-ce pas étrange de supposer la propriété vraie pour tout n lorsque l'objectif de l'exercice est de montrer que la propriété est vraie pour tout n...

— Dans l'hérédité, n'hésitez pas à ré-écrire les propriétés P_n et P_{n+1}. Toujours dans l'optique de savoir ce que l'on veut démontrer ainsi que notre point de départ.

— Dans l'hérédité, la clé est de trouver le lien entre les grandeurs à l'étape $n + 1$ et les grandeurs à l'étape n. Dans l'exemple 3.2 le lien est donné $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$. Lorsque le lien entre l'étape n et l'étape $n + 1$ n'est pas clairement donné c'est-à-vous de l'expliciter.
L'hérédité d'une raisonnement par récurrence n'est finalement qu'un puzzle à deux pièces : l'hypothèse de récurrence et le lien entre l'étape n et $n + 1$.

— Ne pas oublier de faire une conclusion générale. Vous pourrez reprendre la phrase de conclusion de votre enseignant par exemple.

— Montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne nécessite pas toujours un raisonnement par récurrence. Il peut s'agir simplement de calcul littéral ou d'un argument plus simple.

3 Un exercice corrigé

3.1 Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n$.

3.2 Correction

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence $P_n :\ "u_n = 2^n + n"$.

Initialisation :
On souhaite montrer que P_0 est vraie, c'est-à-dire que "$u_0 = 2^0 + 0$" est vraie. D'une part $2^0 + 0 = 1$. D'autre part $u_0 = 1$ d'après l'énoncé. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose P_n vraie (Autrement dit on suppose que l'on pourra écrire librement $u_n = 2^n + n$).

Montrons que P_{n+1} est également vraie.
C'est-à-dire montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$ (Il s'agira de la dernière ligne de la démonstration).

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2u_n - n + 1 \qquad \leftarrow \text{(lien entre étape } n \text{ et étape } n+1) \\
&= 2 \times (2^n + n) - n + 1 \qquad \leftarrow \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2^{n+1} + 2n - n + 1 \\
u_{n+1} &= 2^{n+1} + n + 1
\end{aligned}$$

P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et l'hypothèse de récurrence est héréditaire.

Finalement : Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n$.

4 D'autres exemples pour s'entraîner

4.1 Récurrences et égalités simples

L'objectif de cette partie est de se familiariser avec le principe et la rédaction stricte du raisonnement par récurrence ainsi que de revoir des règles de calculs sur les fractions, puissances, racines carrées etc.

4.1.1 Exercice

On considère une suite géométrique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = -2 \times 3^n$.

Indication : Quelle est la définition d'une suite géométrique ?

4.1.2 Exercice

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10000 \\ u_{n+1} = 1.08u_n + 500 \end{cases}$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ u_n = 16250 \times 1.08^n - 6250$.

4.1.3 Exercice

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{2n+1}$.

4.1.4 Exercice

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases}$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4.2 Récurrences et sommes

L'objectif de cette partie est de comprendre la notation somme $\sum$ et inclure cela dans un raisonnement par récurrence. Si besoin, ne pas hésitez à revenir à une notation somme développée (écrire la somme avec 3 petits points ...).

4.2.1 Exercice

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

4.2.2 Exercice

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.2.3 Exercice

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4.2.4 Exercice

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.
$n!$ se lit "n factorielle".

4.2.5 Exercice

Soit $x \neq 1$, Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Que se passe-t-il si $x = 1$?

4.2.6 Exercice

On pose pour tout $x \geq 0$,
$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 1 + x\ , ...\ ,\ P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

1. Calculer $P_n'(x)$.
2. Démontrer par récurrence sur n que la fonction $f_n : x \to e^x - P_n(x)$ est une fonction positive croissante sur $[0; +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence sur n que la fonction $g_n : x \to e^x - P_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est une fonction négative décroissante sur $[0; +\infty[$.

En déduire que

$$P_n(x) < e^x < P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Calculer la limite de la suite u définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

4.3 Récurrences et inégalités

L'objectif de cette partie est de retravailler avec des inégalités et connaître les règles de changement de sens d'inégalités.

4.3.1 Exercice

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0.7u_n + 1.8 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} < 6$.

4.3.2 Exercice

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \times (u_n + \frac{2}{u_n}) \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction à déterminer.

2. Dresser le tableau de variations de f. On fera attention à bien étudier son domaine de définition et de dérivabilité.

3. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n < \frac{3}{2}$.

4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.
   Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$.

5. En déduire la limite de (u_n).

4.3.3 Exercice

Soit $x > 0$, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N},\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

4.3.4 Exercice

L'objectif de cet exercice est de démontrer par récurrence le résultat suivant :
Pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$, $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ avec $n \geq 2$.
On rappelle que la notation $||$ est la notation pour la valeur absolue.

Le résultat ci-dessus s'appelle **inégalité triangulaire généralisée**.

1. Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$
   (a) Calculer d'une part $(|a+b|^2)$ et $(|a|+|b|)^2$.

   (b) Comparer les deux résultats ci-dessus.

   (c) En déduire $|a+b| \leq |a| + |b|$
2. Démontrer par récurrence l'inégalité triangulaire généralisée.

   Indication : Le résultat final de la question 1 est utile dans l'initialisation et l'hérédité.

4.4 Récurrences en maths expertes

L'objectif de cette partie est de retravailler certaines récurrences que l'on rencontre en maths expertes, ces exercices sont particulièrement intéressants si vous souhaitez poursuivre vos études supérieures avec une dominante mathématiques.

4.4.1 Exercice

Montrer par récurrence forte sur $n \geq 2$ que tout nombre n admet un diviseur premier.

Indication : La différence entre une récurrence SIMPLE et une récurrence FORTE se trouve dans l'hérédité. On supposera ici toutes les propriétés P_2 jusqu'à P_n vraie et on souhaitera montrer P_{n+1}.

4.4.2 Exercice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.01 \\ 0.05 & 0.99 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1}
2. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on explicitera.
3. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Calculer A^n

4.5 Récurrences plus exotiques

L'objectif de cette partie est de vous présenter des problèmes plus exotiques qui vous feront batailler. Si après réflexion vous n'arrivez plus à avancer sur ces exercices, vous pouvez demander un coup de pouce à votre moteur de recherche préféré.

4.5.1 Exercice

On appelle n-gone un polygone à n côtés. Ainsi un triangle est un 3-gone, un pentagone est un 5-gone, etc.
En faisant quelques croquis, conjecturer une formule de la somme des angles (en degré) d'un n-gone, conjecture que vous démontrer ensuite par récurrence sur $n \geq 3$.

4.5.2 Exercice

On appelle n-gone un polygone à n côtés. Ainsi un triangle est un 3-gone, un pentagone est un 5-gone, etc.
Démontrer par récurrence sur $n \geq 4$ que le nombre de diagonales d'un n-gone est égal à $\frac{n(n-3)}{2}$.

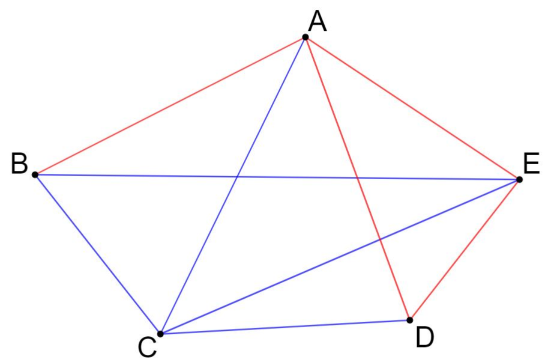
4.5.3 Exercice

On considère la fonction f définie sur $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

4.5.4 Exercice

On considère n villes toutes reliées deux à deux soit par train soit par avion (pas les deux). Voici ci-dessous une représentation schématique avec 5 villes nommées A jusqu'à E. Les liens bleus correspondent au train tandis que les liens rouges correspondent à l'avion.



Démontrer par récurrence sur $n \geq 2$, qu'il existe au moins un moyen de transport permettant de relier n'importe quelle ville à une autre, qu'importe le nombre de correspondances.

Pour mieux comprendre, reprenons le schéma ci-dessus. le train (liens bleus) permet de relier n'importe quelle ville à une autre, par exemple le trajet de C vers E est direct tandis que le trajet de D vers E nécessite une correspondance par le point C.

4.5.5 Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^2 - n + 41$ est-il premier ?

5 Bonus

Si vous souhaitez travailler sur un dernier thème alambiqué faisant intervenir (une des démonstrations possibles) le raisonnement par récurrence, vous pouvez vous renseigner sur le **théorème de Pick**.