Résolution d'équations en vrac

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

16 janvier 2023

N'apprenez plus sans comprendre

1 Les cas de base

1.1 Premier cas de base : $ax + b = 0$

1.1.1 Exemple 1

Résolvons l'équation $3x + 2 = 0$ en isolant x.

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 0 \\ 3x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Conclusion : L'équation $3x + 2 = 0$ admet une seule solution, qui est $x = \frac{-2}{3}$.

1.1.2 Exemple 2

Résolvons l'équation $\frac{3}{4}x - \frac{5}{7} = 0$. Bien que cette équation ait l'air plus complexe que celle précédente, on reste sur un **cas de base**. En faisant les mêmes étapes que précédemment pour isoler x, nous allons aboutir.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x - \frac{5}{7} &= 0 \\ \frac{3}{4}x &= \frac{5}{7} \\ x &= \frac{5}{7} \div \frac{3}{4} \\ x &= \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} \\ x &= \frac{5 \times 4}{7 \times 3} \\ x &= \frac{20}{21} \end{aligned}$$

Conclusion : L'équation $\frac{3}{4}x - \frac{5}{7} = 0$ admet une seule solution, qui est $x = \frac{20}{21}$.

1.2 Deuxième cas de base : Équation produit nul

Considérons l'équation suivante $(4x - 8) \times (x - 7) = 0$.

Cette équation ne fait clairement pas parti du cas de base 1. Pour résoudre cette équation il faut utiliser la propriété suivante.
Un produit est nul si un de ses facteurs est nul.

Ainsi $(4x-8)\times(x-7)=0$ si $4x-8=0$ ou $x-7=0$. Nous avons donc deux équations de type **"cas de base 1"** à résoudre.

D'une part :

$$\begin{aligned}4x-8&=0\\4x&=8\\x&=\frac{8}{4}\\x&=2\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}x-7&=0\\x&=7\end{aligned}$$

Conclusion : L'équation $(4x-8)\times(x-7)=0$ admet deux solutions qui sont $x_1=2$ et $x_2=7$.

2 Cas complexes

Toutes les équations ne sont pas écrites sous la forme d'un cas de base. L'idée sera toujours de s'y ramener. Pour cela on appliquera les deux techniques présentées ci-dessous :

2.1 Technique 1 : Avoir 0 à droite (ou à gauche) de l'égalité

Si l'on analyse les cas de base, on peut remarquer que les équations ont la même particularité d'avoir 0 à droite de l'égalité. Nous allons toujours nous ramener à cela.

2.1.1 Exemple

Cherchons à résoudre l'équation $3x-2=4x+7$.

$$\begin{aligned}3x-2&=4x+7\\3x-2-4x-7&=0 && \text{On a "forcé" 0 à droite de l'égalité}\\-x-9&=0 && \text{On s'est ramené au cas de base 1}\\-x&=9\\x&=-9\end{aligned}$$

Conclusion : L'équation $3x-2=4x-7$ admet une seule solution $x=-9$.

2.2 Technique 2 : On se ramène au cas de base 2 (équation produit nul)

Si après avoir utiliser la technique 1 on ne retombe pas sur un cas de base 1. Alors il faut se ramener au cas de base 2 !

On rappelle que le cas de base 2 est une équation PRODUIT nul, il faut donc transformer l'expression en produit et en termes mathématiques cela s'appelle FACTORISER. On rappelle les deux façons de factoriser.

1. On trouve un facteur commun et on factorise par ce facteur commun.
2. Si on ne trouve pas de facteur commun alors on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$.

2.2.1 Exemple 1

Résolvons l'équation $(x-1)^2 = (x-1) \times (7-2x)$. Pour cela on va se ramener au cas de base 2 en factorisant par un facteur commun.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= (x-1) \times (7-2x) \\
(x-1)^2 - (x-1) \times (7-2x) &= 0 \quad \text{0 à droite de l'égalité} \\
(x-1) \times (x-1) - (x-1) \times (7-2x) &= 0 \\
(x-1) \times (x-1) - (x-1) \times (7-2x) &= 0 \quad \text{On repère le facteur commun} \\
(x-1) \times ((x-1) - (7-2x)) &= 0 \quad \text{On factorise par le facteur commun} \\
(x-1) \times (x-1-7+2x) &= 0 \quad \text{On gère la deuxième grande parenthèse} \\
(x-1) \times (3x-8) &= 0 \quad \text{On s'est ramené au cas de base 2}
\end{aligned}$$

$$\vdots \quad \text{A vous de résoudre proprement ce cas de base 2 !}$$

$$x_1 = 1 \quad ou \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

2.2.2 Exemple 2

Résolvons l'équation $(x-1)^2 - 4 = 0$. Dans cet exemple, il n'y a pas de facteur commun, il faut donc utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$. Pour cela on remarquera que $4 = 2^2$.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 - 4 &= 0 \\
(x-1)^2 - 2^2 &= 0 \\
(x-1+2) \times (x-1-2) &= 0 \quad \text{On applique l'identité remarquable} \\
(x+1) \times (x-3) &= 0 \quad \text{On s'est ramené au cas de base 2}
\end{aligned}$$

$$\vdots \quad \text{A vous de résoudre proprement ce cas de base 2 !}$$

$$x_1 = -1 \quad ou \quad x_2 = 3$$

2.2.3 Exemple 3

Résolvons l'équation $(x-1)^2-3=0$. Même exemple que le précédent ? Presque sauf que pour l'exemple précédent $4=2^2$ a le bon goût d'être carré parfait ce qui n'est pas le cas de 3...

Que faire dans ce cas ? Exactement le même chose que précédemment en remarquant que $3=(\sqrt{3})^2$!

$$\begin{aligned}
(x-1)^2-3&=0\\
(x-1)^2-(\sqrt{3})^2&=0\\
(x-1+\sqrt{3})\times(x-1-\sqrt{3})&=0 \quad \text{On applique l'identité remarquable et on a le cas de base 2}\\
&\vdots \quad \text{A vous de résoudre proprement ce cas de base 2 !}\\
x_1=1-\sqrt{3} \quad &ou \quad x_2=1+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

2.2.4 Exemple 4

Résolvons l'équation $(3x-2)^2+9x^2-4=0$. Cette "horreur" est maintenant à notre portée en utilisant toutes les techniques vues précédemment.

$$\begin{aligned}
(3x-2)^2+9x^2-4&=0 \quad \text{On repère une identité remarquable}\\
(3x-2)^2+(3x+2)\times(3x-2)&=0\\
(3x-2)\times(3x-2)+(3x+2)\times(3x-2)&=0 \quad \text{On repère un facteur commun}\\
(3x-2)\times((3x-2)+(3x+2))&=0 \quad \text{On factorise par le facteur commun}\\
(3x-2)\times(6x)&=0\\
\text{On a un cas de base 2}&\\
&\vdots \quad \text{A vous de résoudre proprement ce cas de base 2 !}\\
x_1=\frac{2}{3} \quad &ou \quad x_2=0
\end{aligned}$$

3 Conclusion

A partir de maintenant si vous avez acquis tous les points précédents alors vous êtes un expert des équations ! Mais savoir résoudre une équation pour savoir résoudre une équation n'est pas très intéressant...

Le prochain point que vous devez savoir faire est de lire un sujet et d'être capable de traduire ce sujet en français en une équation mathématique que vous allez résoudre. Vous trouverez un exemple détaillé dans la carte mentale dans la section "Modéliser par une équation".