Fiche méthodologique : Fondamentaux sur la convexité d'une fonction

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

29 novembre 2022

N'apprenez plus sans comprendre

Dans tout ce document on suppose que l'on travaille avec une fonction f deux fois dérivables sur un intervalle I. $a \in I$.

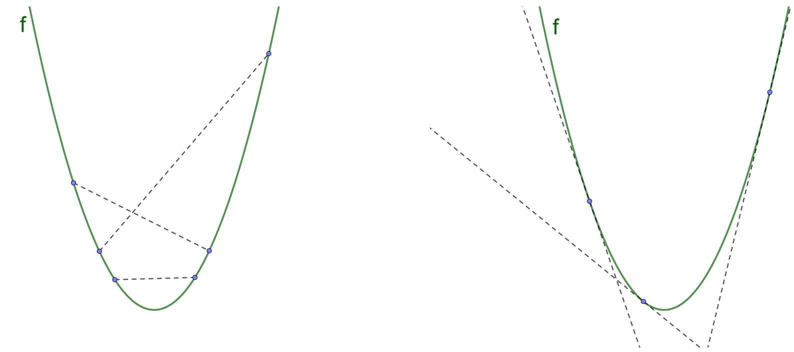
1 Définitions et propriétés

1.1 Définitions graphiques

Définitions : On dit qu'une fonction est convexe sur I si :

— La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes sur I.

— La courbe représentative de f est en dessous de ses cordes dans I.



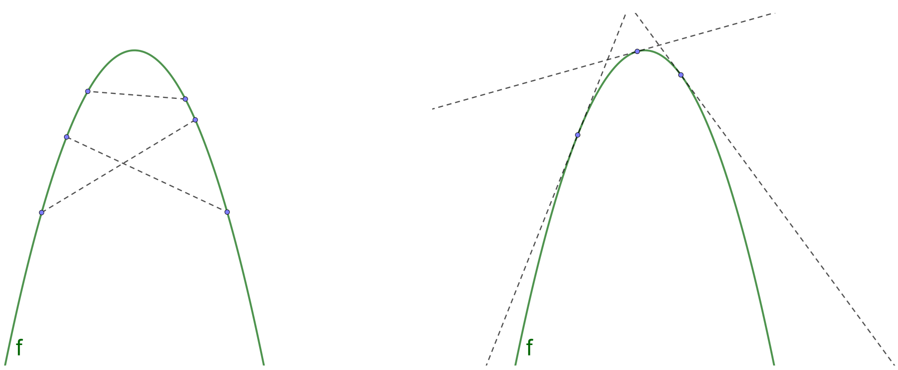
(a) f en dessous de ses cordes (b) f au dessus de ses tangentes

FIGURE 1 – Représentations d'une fonction convexe

Définitions : On dit qu'une fonction est concave sur I si :

— La courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes sur I.

— La courbe représentative de f est au dessus de ses cordes dans I.



(a) f au dessus de ses cordes (b) f en dessous de ses tangentes

FIGURE 2 – Représentations d'une fonction concave

Définition : On dit que $M(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f s'il y a changement de convexité de f au point $x = a$ (Si f passe de convexe à concave ou de concave à convexe).

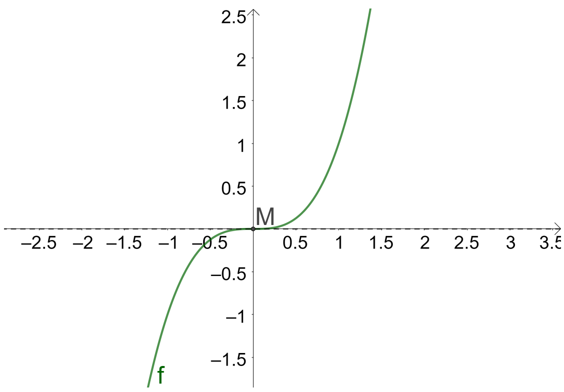


FIGURE 3 – Le point M est point d'inflexion de f.

1.2 Propriétés impliquant les dérivées

Propriété : Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

— f est convexe sur I.

— f' est croissante sur I.

— f'' est positive sur I.

Propriété : Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

— f est concave sur I.

— f' est décroissante sur I.

— f'' est négative sur I.

Propriété : Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

— $M(a; f(a))$ est un point d'inflexion de f.

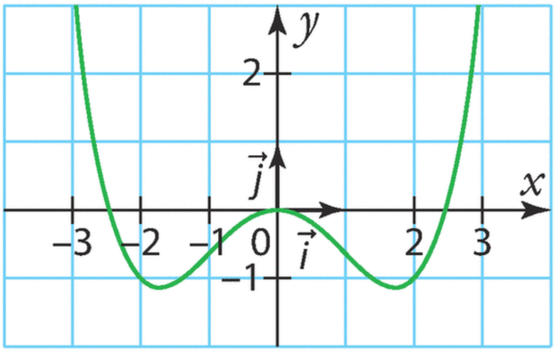
— f' change de variations en $x = a$.

— f'' change de signe en $x = a$.

2 Trois exercices corrigés pour vérifier les connaissances sur la convexité

2.1 Exercice 1 : Lecture graphique de convexité

2.1.1 Énoncé

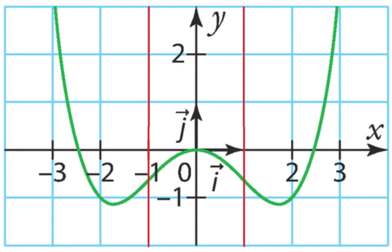


On considère une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité de f lorsque

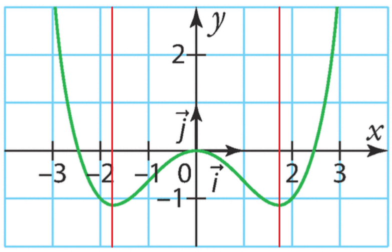
1. La courbe ci-dessus est la courbe de f.
2. La courbe ci-dessus est la courbe de f'.
3. La courbe ci-dessus est la courbe de f''.

2.1.2 Corrigé

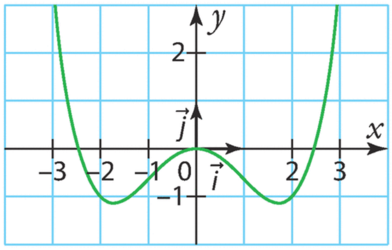
1. Si la courbe représentative représente f.
   Alors par lecture graphique la fonction f est convexe sur $[-3;-1]$ puis concave sur $[-1;1]$ et enfin convexe sur $[1;3]$.



2. Si la courbe représentative représente f'.
   Alors par lecture graphique la fonction f' est décroissante sur $[-3;-1.8]$ donc f est concave sur $[-3;-1.8]$.
   Puis f' est croissante sur $[-1.8;0]$ donc f est convexe sur $[-1.8;0]$.
   Ensuite f' est décroissante sur $[0;1.8]$ donc f est concave sur $[0;1.8]$.
   Finalement f' est croissante sur $[1.8;3]$ donc f est convexe sur $[1.8;3]$.

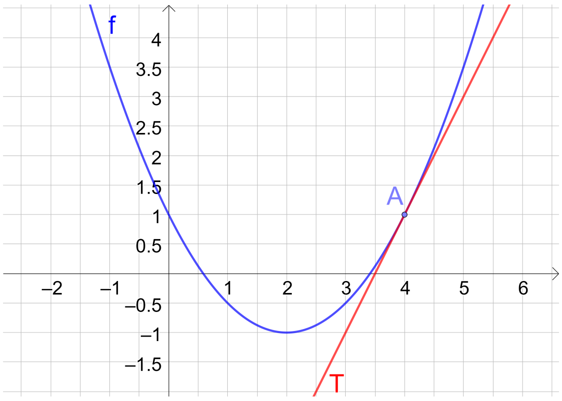


3. Si la courbe représentative représente f''.
Alors par lecture graphique la fonction f'' est positive $[-3; -2.5]$ donc f est convexe sur $[-3; -2.5]$.
Puis f'' est négative sur $[-2.5; 2.5]$ donc f est concave sur $[-2.5; 2.5]$.
Enfin f'' est positive sur $[2.5; 3]$ donc f convexe sur $[2.5; 3]$.



2.2 Exercice 2 : Montrer une inégalité par convexité

2.2.1 Énoncé



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5(x-2)^2 - 1$.

1. Graphiquement, la fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}$?
2. Donner une équation de la tangente de C_f en 4.
3. En déduire que pour tout x réel, $(x-2)^2 \geq 4x - 12$.

2.2.2 Corrigé

1. Graphiquement la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. On rappelle l'équation d'une tangente à C_f au point d'abscisse a.
$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Dans l'exemple $a = 4$ et $M(4; 1) \in C_f$.
Enfin $f'(a)$ représente le coefficient directeur (ou pente) de la tangente.
Par lecture graphique $f'(4) = 2$.

On en déduit l'équation de la tangente de C_f en 4.
$y = 2 \times (x-4) + 1 \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 7$

3. D'après la question 1. f est convexe.
   D'après la question 2. on connaît l'équation d'une tangente à C_f.

   Or par définition si f est convexe alors C_f est au dessus de ses tangentes. On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) \geq 2x - 7 &\Leftrightarrow 0.5(x-2)^2 - 1 \geq 2x - 7 \\ &\Leftrightarrow 0.5(x-2)^2 \geq 2x - 6 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 4x - 12 \end{aligned}$$

2.3 Exercice 3 : Étudier la convexité d'une fonction par le calcul

2.3.1 Énoncé

Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2) \times e^x$.

2.3.2 Corrigé

Pour étudier la convexité d'une fonction par le calcul, "le plus simple" est de dériver deux fois cette fonction et d'étudier le signe de la dérivée seconde.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

En dérivant f comme un produit pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ne pas hésiter à poser u, u', v, v' si besoin) :

$f'(x) = 2x \times e^x + (x^2 + 2) \times e^x = e^x \times (x^2 + 2x + 2)$.

En dérivant f' comme un produit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \times (x^2 + 2x + 2) + e^x \times (2x + 2) \\ &= e^x \times (x^2 + 2x + 2 + 2x + 2) \\ &= e^x \times (x^2 + 4x + 4) \\ &= e^x \times (x + 2)^2 \\ f''(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.