Fiche méthodologique : Déterminer le signe (et/ou les annulations) d'une fonction

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

25 novembre 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

1 Introduction

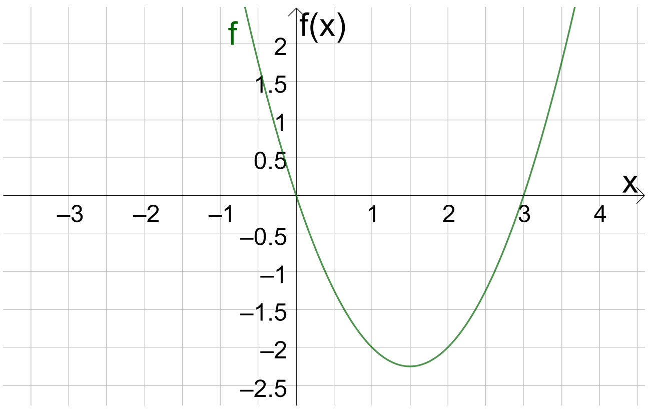
Déterminer le signe et/ou les annulations d'une fonction est un savoir **indispensable** à l'élève de Terminale car permet de répondre à un grand nombre de problèmes.

- — Résolution d'équation
- — Résolution d'inéquation
- — Recherche de seuil
- — Étude du domaine de définition d'une fonction
- — Étude du signe d'une dérivée (pour obtenir les variations d'une fonction)

Ce document a été pensé pour répondre aux deux derniers points mais reste valables pour les autres. De plus si l'on connaît le signe d'une quantité alors on connaît également les annulations de cette quantité. Ainsi dans ce document seul les tableaux de signes sont donnés (seront donc également affichés les zéros d'une quantité).

On rappelle que les termes annulation / zéro / racine sont synonymes.

Important : Rappelons enfin que la notion de "signe d'une fonction ou signe d'une dérivée" n'est pas très rigoureux.
En effet prenons l'exemple de la fonction $f \ : \ x \to x^2 - 3x$ dont le représentation graphique est donnée ci-dessous.



Dans cet exemple il faut travailler par **intervalle**.

- — La fonction f est positive sur $]-\infty; 0]$.
- — La fonction f est négative sur $[0; 3]$.
- — La fonction f est positive sur $]3; +\infty]$.

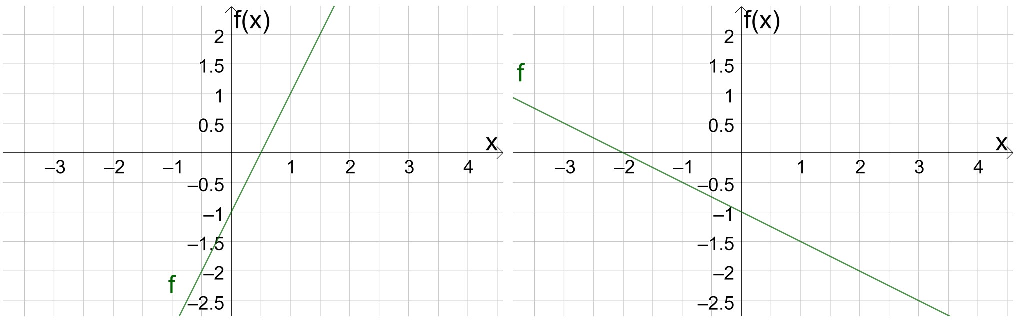
2 Déterminer le signe d'une fonction (et par extension les annulations)

2.1 Fonctions usuelles

On s'intéresse ici à l'ensemble des fonctions dont on doit connaître la représentation graphique et donc également connaître le signe.

2.1.1 $x \to ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Ces fonctions sont définies sur tout $\mathbb{R}$ quelques soient les valeurs de a et b. Les représentations graphiques de ces fonctions peuvent être les suivantes.



(a) Coefficient directeur positif. (b) Coefficient directeur négatif.

FIGURE 1 – Représentation des fonctions affines.

Pour trouver le signe de ces fonctions on résout une simple inéquation.
ATTENTION : Il faut prendre en compte le **signe de a**.

— Si $a > 0$:

$$\begin{aligned} ax + b \geq 0 &\Leftrightarrow ax \geq -b \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

On aboutit au tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

— Si $a < 0$:

$$\begin{aligned} ax + b \geq 0 &\Leftrightarrow ax \geq -b \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

On aboutit au tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

2.1.2 $x \to ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Ces fonctions sont définies sur tout $\mathbb{R}$ quelques soient les valeurs de a, b, et c. Les représentations graphiques de ces fonctions peuvent être les suivantes.

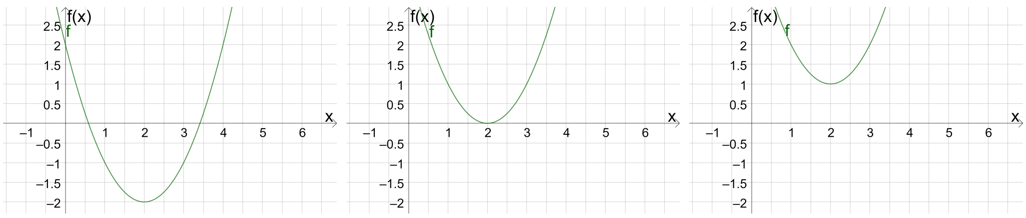


FIGURE 2 – Polynômes du second degré à coefficient dominant positif.

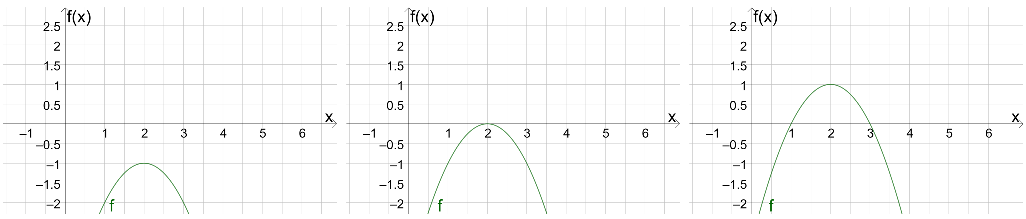


FIGURE 3 – Polynômes du second degré à coefficient dominant négatif.

Il existe de nombreuses méthodes pour trouver les zéros d'un polynôme du second degré, pour retravailler l'ensemble du chapitre, voir le document suivant https://sebastientaurand.fr/wp-content/uploads/2022/07/Fiche-revision-Second-degre.pdf

Dans ce document, seule la méthode du discriminant sera évoquée.

On appelle **discriminant** la grandeur $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas de figure sont envisageables.

1. **Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racine.**

   (a) **Si $a > 0$:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	+	

   (b) **Si $a < 0$:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$-$	

2. **Si $\Delta = 0$ alors il y a une unique racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$.**

   (a) **Si $a > 0$:**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		+	0	+	

   (b) **Si $a < 0$:**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$-$	

3. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(a) Si $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Si $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.1.3 $x \to \frac{1}{x}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$. Voici sa courbe représentative.

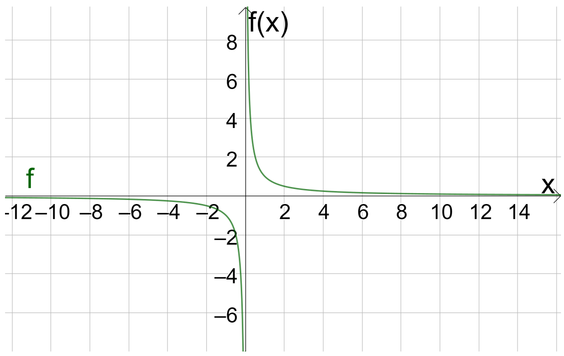


Figure 4 – Représentation de la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

2.1.4 $x \to \sqrt{x}$

Cette fonction est définie sur $[0; +\infty[$. Voici sa courbe représentative.

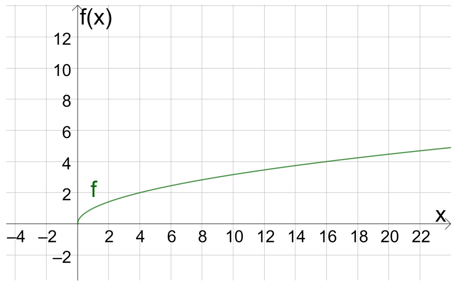


Figure 5 – Représentation de la fonction racine.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	

2.1.5 $x \to e^x$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Voici sa courbe représentative.

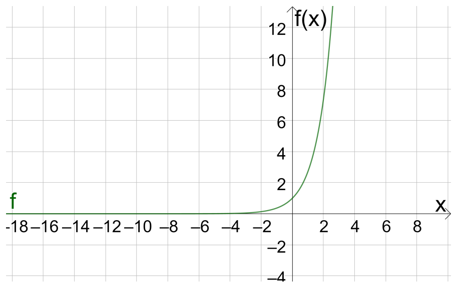


Figure 6 – Représentation de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$

2.1.6 $x \to ln(x)$

Cette fonction est définie sur $]0; +\infty[$. Voici sa courbe représentative.

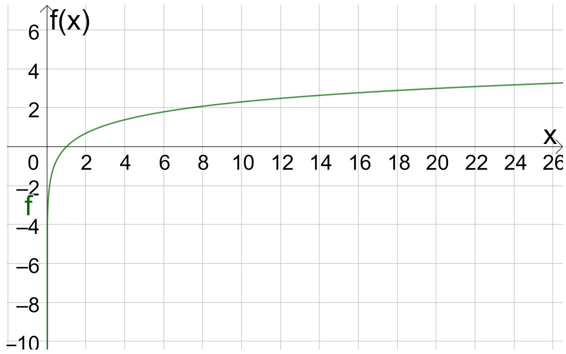
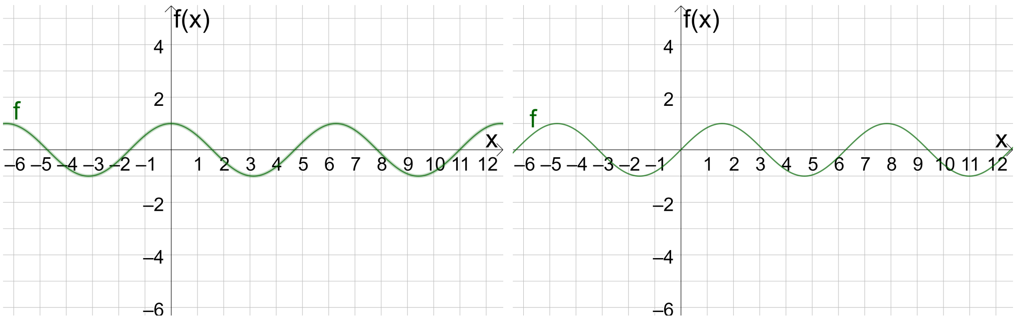


Figure 7 – Représentation de la fonction logarithme népérien.

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2.1.7 Les fonctions trigonométriques $x \to sin(x)$ et $x \to cos(x)$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Voici leurs courbes représentatives. On remarquera que ces fonctions sont 2π-périodiques, on ne s'intéressera donc qu'à l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans le tableau de signe ci-dessous.



(a) fonction cosinus (b) fonction sinus

FIGURE 8 – Représentation des fonctions trigonométriques.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$sin(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0

2.2 Les opérations usuelles sur les fonctions

Une fois les fonctions usuelles connues il est possible d'en fabriquer de plus complexes. On se posera également la question du signe de ces fonctions.

2.2.1 Produit (et quotient)

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, on considère n fonctions $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_n$ définies sur $\mathbb{R}$.
On pose la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) \times f_2(x) \times ... \times f_n(x)$.

On peut connaître le signe de f en connaissant les signes respectifs de $f_1,\ ...,\ f_n$ par règle des signes.

Important : Ce résultat fonctionne également dans le cadre de quotients de fonctions. Ainsi pour étudier le signe d'une quantité on cherchera TOUJOURS à l'écrire sous une forme factorisée et/ou sous forme de quotient.

Exemple : On considère la fonction $f\ :\ x \to ln(x) \times e^x \times (3x-2) \times (x^2 - 6x + 8)$ définie sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose :

— $f_1(x) = ln(x)$.

— $f_2(x) = e^x$.

— $f_3(x) = 3x - 2$.

— $f_4(x) = x^2 - 6x + 8$.

On cherche les signes de $f_1,\ f_2,\ f_3$ et f_4.

— f_1 est une fonction de référence. Voir résultats de la partie précédente.

— f_2 est une fonction de référence. Voir résultats de la partie précédente.

— Pour f_3, on cherche à résoudre $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.
Il est donc possible de construire le tableau de signe de $3x - 2$.

— Pour f_4, on pose $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4$.
f_4 admet deux racines $x_1 = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = 4$
Sachant que 1>0, il est possible de construire le tableau de signe de $x^2 - 6x + 8$.

x	0		$\frac{2}{3}$		1		2		4		$+\infty$
$ln(x)$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
e^x	$\Vert$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x-2$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-6x+8	$\Vert$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2.2.2 Composition

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
On appelle **composée de f par g** la fonction $f \circ g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Pour étudier le signe de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ il faut que f soit une fonction de référence, il restera donc à travailler sur g.

Exemple : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ln(x^2 + \frac{1}{2})$.

La fonction h est la composition de f par g où les fonctions f et g sont données ci-dessous.

- $f \ : \ x \to ln(x)$
- $g \ : \ x \to x^2 + \frac{1}{2}$

Dans cet exemple , f est la fonction ln qui est une fonction de référence. On sait que $ln(X) \geq 0$ si $X \geq 1$.
On cherche donc à résoudre l'inéquation $g(x) \geq 1$.

$$\begin{aligned} g(x) \geq 1 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On aboutit au tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$x^2 + \frac{1}{2}$		> 1	1	< 1	1	> 1	
$ln(x^2+\frac{1}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires / corollaire et dichotomie

Rappelons le **théorème des valeurs intermédiaires**. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $f(a) \times f(b) < 0$ (f(a) et f(b) de signes contraires).
2. f est continue sur $[a; b]$.

Alors il existe au moins un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

Ensuite rappelons le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $f(a) \times f(b) < 0$ (f(a) et f(b) de signes contraires).
2. f est continue sur $[a; b]$.
3. f est strictement monotone sur $[a; b]$.

Alors il existe un unique $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarques :

1. Ces deux théorèmes permettent de justifier **l'existence** de zéros mais ne permettent pas de les déterminer. Il est cependant possible de trouver des approximations numériques via la méthode de dichotomie.
2. Pour le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il est nécessaire de connaître les variations de la fonction donc généralement de calculer une dérivée, étudier son signe et calculer des limites.

Voici un programme Python permettant d'appliquer la méthode de dichotomie.

```
"""
Prend en argument un reel x.

Renvoie f(x) ou f est la fonction d'etude.
"""
def f(x):
    return (42*x*x*x-178*x*x+32*x+32)/7.0


"""
Prend en arguments :
- Une fonction f.
- Deux reels a et b (les bornes d'etude).
- Un reel seuil.

Affiche un reel m.
Il s'agit d'une approximation a seuil pres tel que f(m) = 0.

"""
def dichotomie(f,a,b,seuil):
    m = (a+b)/2.0
    while b-a > seuil:
        m=(a+b)/2.0
        if f(m)*f(a)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    print(m,"est une racine de f a",seuil,"pres.")
```

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^3 - \frac{178}{7}x^2 + \frac{32}{7}x + \frac{32}{7}$.

Dans cet exemple on suppose que l'on a fait l'étude de fonction et on arrive au résultat suivant (les résultats sont approximés à 0.01 près).

x	$-\infty$	0.09	2.73	$+\infty$
f		4.78		$+\infty$
	$-\infty$		-50.4	

Appliquons trois fois le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (intervalle par intervalle).

1. On travaille sur l'intervalle $]-\infty; 0.09]$.
   - La fonction f est continue sur l'intervalle de travail.
   - La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle de travail.
   - $0 \in]-\infty; 4.78]$

   Ainsi il existe un unique $\alpha \in]-\infty; 0.09]$ tel que $f(\alpha) = 0$. On détermine α à l'aide de la méthode de dichotomie appliquée par le programme Python vu précédemment.

   ```
   >>> dichotomie(f,-10,0.09,0.01)
   -0.33370117187500004 est une racine de f a 0.01 pres.
   ```

2. On travaille sur l'intervalle $]0.09; 2.73]$.
   - La fonction f est continue sur l'intervalle de travail.
   - La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle de travail.
   - $0 \in [-50.4; 4.78[$

   Ainsi il existe un unique $\beta \in]0.09; 2.73]$ tel que $f(\beta) = 0$. On détermine β à l'aide de la méthode de dichotomie appliquée par le programme Python vu précédemment.

   ```
   >>> dichotomie(f,0.09,2.73,0.01)
   0.56953125 est une racine de f a 0.01 pres.
   ```

3. On travaille sur l'intervalle $]2.73; +\infty[$.
   - La fonction f est continue sur l'intervalle de travail.
   - La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle de travail.
   - $0 \in]-50.4; +\infty[$

   Ainsi il existe un unique $\gamma \in]2.73; +\infty[$ tel que $f(\gamma) = 0$. On détermine γ à l'aide de la méthode de dichotomie appliquée par le programme Python vu précédemment.

```
>>> dichotomie(f,2.73,5,0.01)
3.9980078125 est une racine de f a 0.01 pres.
```

A l'aide du tableau de variation de f et du corollaire de TVI, il est possible de donner le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	