Fiche méthodologique : Comprendre la notion de Variable aléatoire à l'aide d'exemples

Sébastien TAURAND

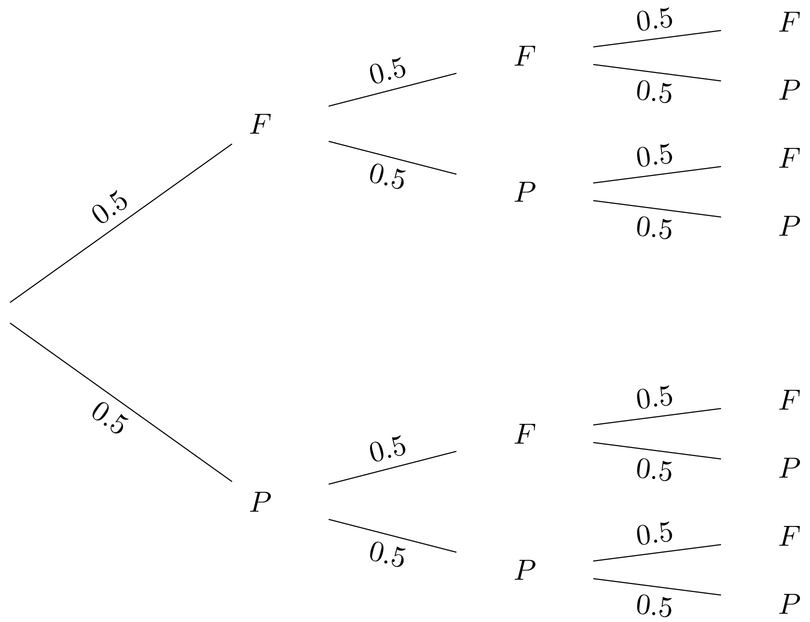
14 octobre 2022

N'apprenez plus sans comprendre

1 Pourquoi introduire la notion de Variable Aléatoire ?

Considérons un exemple qui permettra de comprendre l'intérêt des variables aléatoires.

On lance trois pièces équilibrées. Les lancers sont indépendants. On notera P l'événement "obtenir pile" et F l'événement "obtenir face". Il est possible de représenter la situation via un arbre de probabilité.



On considère le jeu suivant : "Deux joueurs participent à cette expérience aléatoire. Le joueur A gagne si 0 ou 1 pile est tiré sur les trois lancers. A l'inverse le joueur B gagne si 2 ou 3 piles sont tirés sur les trois lancers.".

Les résultats bruts de cette expérience sont :
$\{\{FFF\}, \{FFP\}, \{FPF\}, \{FPP\}, \{PFF\}, \{PFP\}, \{PPF\}, \{PPP\}\}$. Cependant dans le contexte du jeu y-a-t-il une différence entre les résultats $\{PPF\}$ et $\{PFP\}$? **NON** dans ces deux résultats possibles il y a au final 2 piles.

Dans cet exemple il est plus judicieux d'introduire une **variable aléatoire** qui introduit l'information qui nous intéresse vraiment. Pour ce jeu on pourra l'écrire de la manière suivante : "Posons X la variable aléatoire comptant le nombre total de piles lors de trois lancers répétés d'une pièce équilibrée."

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

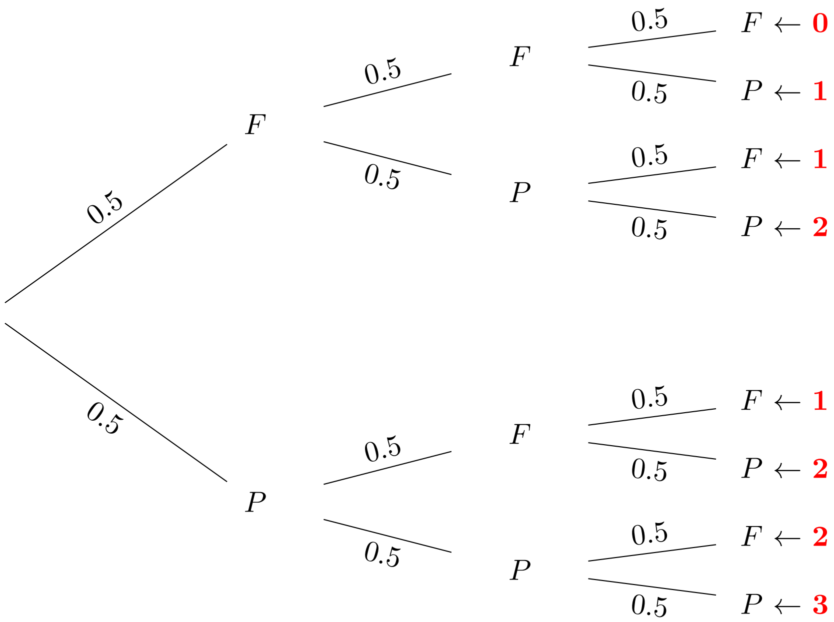
Une fois une variable aléatoire introduite on cherchera toujours à la représenter simplement dans un tableau. Construire ce tableau revient à "**donner la loi de probabilité de X**".

Ce tableau est un tableau à 2 lignes de la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

- La ligne x_i représente les résultats possibles de la variable aléatoire X.
- La ligne $P(X = x_i)$ représente les probabilités associées aux résultats possibles de la variable aléatoire X.

Pour mieux comprendre ce tableau et savoir comment le remplir concrètement, reprenons l'exemple du jeu des trois lancers de pièces. On reprendra également l'arbre de probabilité où on ajoutera en **rouge** les résultats x_i de la variable aléatoire. Autrement dit dans notre exemple le nombre de piles obtenus pour trois lancers de pièces.



Finalement voici la loi de probabilité de la variable aléatoire X exemple que l'on détermine par lecture graphique de l'arbre de probabilité.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0.5^3 = 0.125$	$3 \times 0.5^3 = 0.375$	$3 \times 0.5^3 = 0.375$	$0.5^3 = 0.125$

2.1 Un autre exemple

On considère un autre exemple qu'est celui d'un jeu à gratter qui coûte 2 euros. Le verso du ticket (Paragraphe 2) donne des informations concernant les gains possibles et les probabilités associées.


1 La participation à ce jeu implique l'adhésion à son règlement publié au Journal Officiel, disponible auprès de La Française des Jeux, et qui peut être consulté auprès des détaillants et sur fdj.fr
2 Tableau de lots : sur 4 500 000 tickets : 661 500 lots de 2€, 476 000 lots de 4€, 150 000 lots de 6€, 101 350 lots de 10€, 45 000 lots de 20€, 415 lots de 100€, 8 lots de 1 000€ et 3 lots de 25 000€. Au
3 moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.

En notant X la variable aléatoire (VA) donnant le bénéfice d'un ticket. Pouvez-vous donner la loi de probabilité de X ?

Voici la correction. **Il ne fallait pas oublier que le ticket coûte 2 euros et qu'il est possible de ne rien gagner !**

x_i	-2	0	2	4	8	18	98	998	24998
$P(X = x_i)$	$\frac{3065724}{4500000}$	$\frac{661500}{4500000}$	$\frac{476000}{4500000}$	$\frac{150000}{4500000}$	$\frac{101350}{4500000}$	$\frac{45000}{4500000}$	$\frac{415}{4500000}$	$\frac{8}{4500000}$	$\frac{3}{4500000}$

2.2 Définir une variable aléatoire Y par rapport à une autre variable aléatoire X

Considérons connue une variable aléatoire X et sa loi de probabilité. Il peut être intéressant de définir une nouvelle variable aléatoire Y à partir de X. En effet prenons l'exemple suivant. On considère un QCM de 5 questions noté sur 20. Une seule réponse juste par question, une bonne réponse donne 4 points, une mauvaise donne 0 point. On suppose qu'il est impossible de ne pas répondre à une question.

En notant X la variable aléatoire donnant la nombre de bonnes réponses au QCM et en notant Y la variable aléatoire donnant le score sur 20 au QCM. On pourra écrire $Y = 4X$.

La loi de X ci-dessous est connue :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.05	0.1	0.3	0.3	0.15	0.1

Alors on connaît également celle de Y !

y_i	0	4	8	12	16	20
$P(Y = y_i)$	0.05	0.1	0.3	0.3	0.15	0.1

3 Espérance, Variance et interprétation

Connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire est le B-A-BA et est la première étape que vous mettrez en place. Néanmoins ce simple tableau n'est pas toujours suffisant lorsque l'on souhaite répondre à des questions plus pointus.

3.1 Espérance

Par exemple, en reprenant notre exemple de jeu à gratter, la question à se poser est bien évidemment la suivante : "**Le jeu est-il rentable ? Autrement dit si l'on achète un grand nombre de tickets, vais-je en moyenne gagner de l'argent ?**"

Rappel : Rappelons comment calculer une moyenne pondérée via un exemple classique de notes. On considère un élève ayant les notes suivantes et on souhaite déterminer sa moyenne générale. On fera ainsi la moyenne des notes pondérées par les coefficients.

Matière	Maths	Français	Anglais	EPS
Note	18	12	14	16
Coefficient	9	5	4	2

$$\text{moyenne générale} = \frac{\overbrace{18 \times 9 + 12 \times 5 + 14 \times 4 + 16 \times 2}^{\text{somme des produits entre notes et coefficients}}}{\underbrace{9 + 5 + 4 + 2}_{\text{somme des coefficients}}}$$

Cet aparté étant faite, reprenons une loi de probabilité d'une variable X quelconque.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

On définit la notion d'espérance de X, notée $E(X)$, par la moyenne des résultats possibles de X pondérés par leurs probabilités associées. autrement dit :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} \\
&= \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n}{1} \qquad \text{(car la somme des probas vaut 1)} \\
&= x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k \qquad \text{(Cette ligne et celle d'avant signifie la même chose)}
\end{aligned}$$

La définition précédente étant théorique, revenons à notre exemple de jeu à gratter dont on connaît la loi de probabilité de X qui représente le bénéfice d'un ticket.

x_i	-2	0	2	4	8	18	98	998	24998
$P(X=x_i)$	$\frac{3065724}{4500000}$	$\frac{661500}{4500000}$	$\frac{476000}{4500000}$	$\frac{150000}{4500000}$	$\frac{101350}{4500000}$	$\frac{45000}{4500000}$	$\frac{415}{4500000}$	$\frac{8}{4500000}$	$\frac{3}{4500000}$

Calculons $E(X)$ avec la formule vue précédemment.

$$\begin{aligned}E(X) = &-2\times\frac{3065724}{4500000}+0\times\frac{661500}{4500000}+2\times\frac{476000}{4500000}+4\times\frac{150000}{4500000}+8\times\frac{101350}{4500000}\\&+18\times\frac{45000}{4500000}+98\times\frac{415}{4500000}+998\times\frac{8}{4500000}+24998\times\frac{3}{4500000}\\&=-0.63\end{aligned}$$

Conclusion et interprétation : En réalisant un grand nombre de grattages, en moyenne on perdrait 0.63€ par ticket. Autrement dit le jeu n'est pas rentable.

3.2 Variance

La notion d'espérance est fondamentale dans l'étude des VA, car permet de répondre à la question volontairement mal écrite ici : "Que se passe t-il en moyenne sur un grand nombre d'expériences ?".

Cependant l'espérance ne donne pas toujours un résultat interprétable et/ou pertinent. On pourra prendre les deux citations très connus et comiques de statisticiens.

- "En moyenne l'être humain possède un peu moins de deux jambes."
- "Si Jeff Bezos entre dans un bar, en moyenne tous les clients du bar sont millionnaires."

Ces deux exemples sont là pour vous faire comprendre qu'une espérance seule n'est pas toujours utile et qu'il peut être nécessaire de la coupler avec la notion de **variance**.

On définit de manière barbare la variance de X, noté V(X), par la formule suivante $V(X) = E((X-E(X))^2)$. Cherchons à comprendre cet objet plus simplement en le réécrivant ainsi, $V(X) = E((X-E(X))^2)$.

- La variance fait intervenir la notion d'espérance.
- En notant $Y = (X-E(X)^2)$, on a V(X) = E(Y) où Y est une variable aléatoire obtenue via la variable aléatoire X.

Cherchons à comprendre ce que représente la variable aléatoire $Y = (X - E(X))^2$. Si x_i est un résultat possible de X alors $y_i = (x_i - E(X))^2$ est un résultat possible de Y.

— $x_i - E(X)$ représente l'écart entre x_i et la "moyenne de X" (l'espérance)

— $(x_i - E(X))^2$ représente donc la grandeur précédente au carré. (pour avoir une grandeur positive)

La grandeur Y étant mieux comprise, il faut maintenant comprendre ce que représente $V(X) = E(Y)$, il s'agit de la "moyenne" des écarts des x_i à $E(X)$ au carré. Autrement dit la variance représente la dispersion des valeurs x_i à $E(X)$ (comptée de manière positive grâce au carré dans la formule).

3.3 Calculer une variance en pratique

Reprenons l'exemple du QCM et de la loi X qui donne le nombre de bonnes réponses. On rappelle également la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.05	0.1	0.3	0.3	0.15	0.1

Cherchons à déterminer la variance de X. Pour cela il est d'abord nécessaire de déterminer l'espérance de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0.05 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.15 + 5 \times 0.1 \\ &= 2.9 \end{aligned}$$

Interprétation : Si l'on réalise un grand nombre de fois le QCM, en moyenne on obtiendra 2.9 bonnes réponses sur 5.

L'espérance de X étant connue, on introduit la variable $Y = (X - E(X))^2$ et sa loi de probabilité ci-dessous.

y_i	$(0-2.9)^2$	$(1-2.9)^2$	$(2-2.9)^2$	$(3-2.9)^2$	$(4-2.9)^2$	$(5-2.9)^2$
$P(Y = y_i)$	0.05	0.1	0.3	0.3	0.15	0.1

En simplifiant les calculs pour les y_i on obtient ceci.

y_i	8.41	3.61	0.81	0.01	1.21	4.41
$P(Y = y_i)$	0.05	0.1	0.3	0.3	0.15	0.1

La loi de probabilité de Y étant donnée, il est possible de calculer E(Y). Sachant que $E(Y) = V(X)$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(Y) \\ &= 8.41 \times 0.05 + 3.61 \times 0.1 + 0.81 \times 0.3 + 0.01 \times 0.3 + 1.21 \times 0.15 + 4.41 \times 0.1 \\ &= 1.65 \end{aligned}$$

Conclusion : La variance de X vaut ici 1.65, ce nombre est nécessairement positif. Plus celui est grand plus on dira que les résultats x_i sont dispersés de E(X).

4 Somme de variables aléatoires et propriétés sur espérance et variance

4.1 Construire une variable aléatoire Z à partir de deux variables aléatoires X et Y

On considère l'expérience aléatoire suivante. On lance deux dés équilibrés non pipés. On note X la variable aléatoire donnant le résultat du premier dé. On note Y la variable aléatoire donnant le résultat du second dé. On note Z le résultat de la somme des deux dés. On pourra donc écrire $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$.

Les lois de probabilités de X et Y sont ici évidentes.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

y_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Nous pouvons déterminer la loi de probabilité de Z en utilisant un arbre de probabilité ou dans le cas présent un tableau à double entrée.

Y \ X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

On en déduit la loi de probabilité de Z.

z_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

4.2 Propriétés et définitions autour de l'espérance et de la variance

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si $E(XY) = E(X) \times E(Y)$. Cette notion est toujours introduite dans un énoncé et sera nécessaire pour justifier des calculs de variances.

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, pour toutes variables aléatoires X, Y $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$. On dira que **l'espérance est linéaire**.
2. Pour toutes variables aléatoires X_1, ..., X_n mutuellement indépendantes $V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$
3. Pour toute variable aléatoire X et pour tout $b \in \mathbb{R}$, $V(X + b) = V(X)$
4. Pour toute variable aléatoire X et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $V(aX) = a^2 \times V(X)$

Dans tout problème où l'on introduira des sommes de variables aléatoires, ces formules seront vitales. La démonstration de ces formules n'est pas cependant pas demandé car demande une certaine technicité de calcul. Ces formules nous permettrons également de démontrer des résultats sur la loi binomiale.

5 Loi de Bernoulli, loi binomiale et propriétés

Cherchons les situations aléatoires les plus simples et les lois de probabilités les plus simples imaginables.

5.1 Loi de Bernoulli

Considérons une expérience à deux résultats possibles. On considérera le premier résultat comme étant un succès et l'autre comme étant un échec. Enfin, on notera p la probabilité du succès et donc $1 - p$ la probabilité de l'échec. Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

Nous pouvons ainsi donner la loi de probabilité de X.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p. On notera cela $X \sim \mathcal{B}(p)$

5.1.1 Propriétés

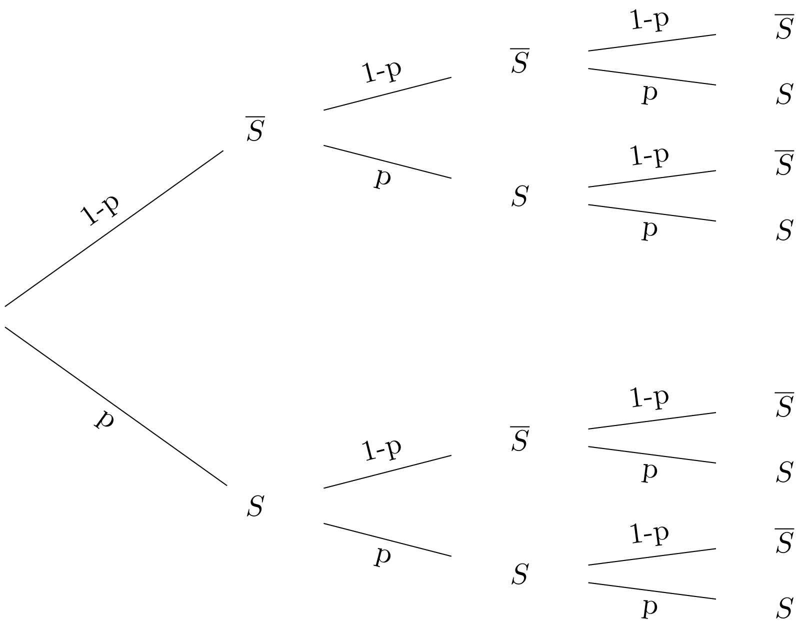
Le lecteur est invité à démontrer les deux résultats ci-dessous.
Supposons que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors

1. $E(X) = p$
2. $V(X) = p \times (1 - p)$

5.2 Loi binomiale

Considérons à nouveau la situation à deux issues possibles, un succès (probabilité p) ou un échec (probabilité $1-p$). Répétons cette situation n fois. Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de succès. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On notera $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Il est possible de représenter la situation par un arbre de probabilité. Prenons par exemple $n = 3$ (on répète trois fois la situation "succès-échec" que l'on appelle aussi schéma de Bernoulli.) On notera S l'événement : "obtenir un succès".



A partir de cet arbre de probabilité, nous pouvons donner la loi de probabilité de X où $X \sim \mathcal{B}(3,p)$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$(1-p)^3$	$3 \times p \times (1-p)^2$	$3 \times p^2 \times (1-p)$	p^3

Dernière question cruciale à se poser lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Comment écrire $P(X = k)$ pour tout $k \in \{0; ...; n\}$? Autrement dit comment calculer la probabilité d'obtenir k succès parmi n tentatives ?

Pour cela imaginons par exercice de pensée (ou représentez-le) un arbre représentant la situation à n étages.

Soit $k \in \{0; ...; n\}$, considérons, en visualisant un arbre de probabilité, la probabilité d'un seul chemin où il y a k succès parmi n tentatives. Notons C l'événement "passer par ce chemin".

$$\text{On a } P(C) = \underbrace{p^k}_{\text{Représente les } k \text{ succès}} \times \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{Représente les } n-k \text{ échecs}}.$$

Peut-on calculer $P(X = k)$ à partir de $P(C)$? La réponse est oui !

$P(X = k) =$ Nombre de chemins à k succès parmi n tentatives $\times P(C)$.

On notera $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins à k succès parmi n tentatives. Cette notation représente donc un nombre et sera davantage étudier dans le chapitre Dénombrement. Pour ce chapitre il sera seulement demande de savoir calculer $\binom{n}{k}$ à l'aide de la calculatrice.

Finalement $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

5.3 Propriétés

On considère $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En notant X_1, ..., X_n n variables aléatoires mutuellements indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. Alors nous pouvons écrire $X = X_1 + ... + X_n$. A l'aide de ce résultat et du paragraphe sur les sommes de variables aléatoires, le lecteur est invité à démontrer les propriétés suivantes.

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$

6 Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Un dernier résultat pouvant être intéressant sur les variables aléatoires est le suivant.

Pour toute variable aléatoire X, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$,
$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

L'interprétation de ce résultat est la suivante : "La probabilité que les valeurs possibles de X soient éloignés d'au moins a de son espérance est inférieure ou égale à $\frac{V(X)}{a^2}$". Autrement dit on cherche à majorer la probabilité que la variable X prenne des valeurs "extrêmes" vis-à-vis de son espérance.

Par exemple pour une variable aléatoire X telle que $E(X) = 30$ et $V(X) = 25$ alors d'après l'inégalité :
$P(|X - 30| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.