Fiche méthodologique : Les basiques sur les nombres complexes

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

26 septembre 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

Ce document présente les notions fondamentales de Terminale concernant les nombres complexes. L'ensemble des exemples présenté n'est pas exhaustif. Cependant ceux-ci sont détaillés et représentés de telle sorte que la compréhension prime sur l'apprentissage.

1 Différentes écritures d'un nombre complexe

1.1 Le nombre i

On définit le nombre i comme étant une solution de l'équation $x^2+1=0$. Autrement dit on peut écrire $i^2=-1$.

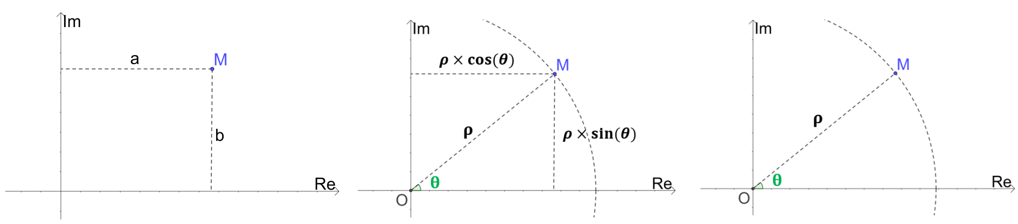
Étant donné que pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0$. On en déduit que i n'est pas un nombre réel. i est un nombre **complexe**. On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Enfin i n'étant pas un nombre réel, on ne peut pas le représenter sur la droite réelle. Pour représenter un nombre complexe, on le placera sur ce qu'on appelle le **plan complexe**. Des exemples de représentations seront donnés par la suite.

1.2 Les trois écritures et interprétations géométriques

Forme	Algébrique	Trigonométrique	Exponentielle
Écriture	$a+ib$	$\rho \times (cos(\theta)+isin(\theta))$	$\rho \times e^{i\theta}$
Interprétation	On définit le point M d'affixe z_M par ses coordonnées $M(a;b)$	Combinaison entre la forme algébrique et la forme exponentielle	On définit le point M d'affixe z_M par sa distance ρ à l'origine O et l'angle θ entre l'axe des réels et (OM)

Remarque importante Attention au vocabulaire : Point $\neq$ affixe.



(a) Forme algébrique (b) Forme trigonométrique (c) Forme exponentielle

FIGURE 1 – Diverses représentations d'un nombre complexe

- a et b sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z.
- ρ et θ sont respectivement le module et un argument de z. Il y a une infinité d'arguments (modulo-2π)

1.3 Passer d'une forme à l'autre

Le tableau précédent et notamment les représentations graphiques précédentes permettent de déterminer rapidement les liens de passage d'une forme à l'autre. On remarquera dans le tableau précédent que la forme trigonométrique est un mix de la forme algébrique et de la forme exponentielle.

1. Connaissant ρ et θ on détermine instantanément a et b.

   En effet, par identification sur la forme trigonométrique
   $a = \rho \times cos(\theta)$ et $b = \rho \times sin(\theta)$.

2. Connaissant a et b on peut déterminer ρ et θ.

   En effet par théorème de Pythagore $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

   Enfin pour déterminer θ, il est nécessaire de déterminer à la fois $cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ et $sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$.

3. $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$

Exemples :

1. On considère le nombre complexe $z = 5e^{-\frac{i\pi}{3}}$.
   Déterminons la forme algébrique de z.

$$\begin{aligned}
z &= 5e^{-\frac{i\pi}{3}} \\
&= \rho \times cos(\theta) + i \times \rho \times sin(\theta) \\
&= 5 \times cos(\frac{\pi}{3}) + i \times 5 \times sin(\frac{\pi}{3}) \\
&= 5 \times \frac{1}{2} + i \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
z &= 2.5 + \frac{5\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

2. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} + 3i$.
   Déterminons la forme exponentielle de z.

   Dans un premier temps déterminons ρ.
   $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

   Ensuite $cos(\theta) = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{b}{\rho} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Ces deux informations nous donnent $\theta = \frac{\pi}{3}$ (voir cours de Première sur la trigonométrie si difficultés.)

1.4 Opérations sur les nombres complexes

1.4.1 Forme algébrique

Les principes de calculs sont les mêmes que pour du calcul littéral standard. Autrement dit les règles de développement, factorisation, distributivité etc fonctionnent. On pourra dire que "i joue le rôle de x" dans le sens où "on regroupera les constantes entres elles et les i entre eux".

Exemples

— Un calcul de somme : $(-5 + 3i) - (3 - i) = -5 + 3i - 3 + i = -8 + 4i$
— Un calcul de multiplication :

$$\begin{aligned}
(5 - 7i) \times (1 + 3i) &= 5 + 15i - 7i - 21i^2 \qquad \text{(Par double distributivité)} \\
&= 5 + 15i - 7i - 21 \times (-1) \qquad (\text{car } i^2 = -1) \\
&= 26 + 8i
\end{aligned}$$

1.4.2 Forme exponentielle

On rappelle la définition de l'exponentielle complexe. Cette exponentielle a les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle.
Autrement dit pour tout $a, b \in \mathbb{C},\ e^a \times e^b = e^{a+b}$ et $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

Exemple

$$\begin{aligned}
6e^{-\frac{i\pi}{3}} \times \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{2}} &= 6 \times \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}e^{+\frac{i\pi}{2}} \\
&= 2e^{-\frac{i\pi}{3}+\frac{i\pi}{2}} \qquad \text{(Par propriété de l'exponentielle)} \\
&= 2e^{\frac{i\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Remarque importante : On comprend ainsi que la forme exponentielle est très pratique pour les calculs de multiplication et division mais n'est PAS DU TOUT adaptée pour les calculs d'additions et de soustractions.

Si l'on demande de faire une somme/soustraction de nombres complexes écrits sous formes exponentielles alors il sera plus efficace (hormis cas particulier que nous verrons dans la Partie "Astuces") d'écrire les nombres complexes sous leurs formes algébriques.

2 Résolution d'équations

2.1 La méthode brutale/frontale

Un nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$. Dans n'importe quelle équation on peut essayer de remplacer z par $a + ib$ et essayer de déterminer a et b en isolant la partie réelle et la partie imaginaire.

Exemple : Résolvons l'équation $2i\overline{z} + i = 3(z - 1 - i)$. Posons $z = a + ib$, on rappelle que dans ce cas $\overline{z} = a - ib$.

$$\begin{aligned}
2i\overline{z} + i = 3(z - 1 - i) &\Leftrightarrow 2i(a - ib) + i = 3(a + ib - 1 - i) \\
&\Leftrightarrow 2ia - 2i^2b + i = 3a + 3ib - 3 - 3i \\
&\Leftrightarrow 2ia + 2b + i - 3a - 3ib + 3 + 3i = 0 \\
&\Leftrightarrow (3 - 3a + 2b) + i(4 + 2a - 3b) = 0 + 0i
\end{aligned}$$

Par unicité de la forme algébrique d'un nombre, on cherche donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3 - 3a + 2b = 0 & L_1 \\ 4 + 2a - 3b = 0 & L_2 \end{cases}$$

En faisant le calcul "$2L_1 + 3L_2$" pour éliminer une inconnue, on trouve $18 = 0$, ce qui est impossible. On en déduit que l'équation proposée n'admet pas de solutions.

2.2 Équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \geq 0$, revoir cours de Première sur les trinômes du second degré.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées.
  $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Il suffit d'apprendre cette formule et de s'entraîner... L'élève intrigué qui souhaite continuer activement les Mathématiques en études supérieures pourra faire ses propres recherches sur le pourquoi de ces résultats. Une autre piste de recherche est de se poser la question des solutions de $az^2 + bz + c = 0$ lorsque $a, b, c \in \mathbb{C}$.

2.3 Équation de la forme $z^n = 1$ / Racines n-ème de l'unité

Cherchons à résoudre l'équation $z^n = 1$. z^n invite à utiliser la forme exponentielle.

Posons $z = \rho e^{i\theta}$ alors $z^n = \rho^n e^{in\theta}$. D'autre part $1 = 1e^0$.

On cherche donc à résoudre $\rho^n e^{in\theta} = 1e^0$.

Par identification :

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi \qquad \text{(avec } k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{(avec } k \in \{0; 1; ...; n-1\}) \end{cases}$$

Conclusion Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; ...; n-1\}$.

3 Géométrie via les nombres complexes

Soit $z = a + ib$. Cette affixe peut représenter soit un point $M(a; b)$ soit un vecteur $\vec{u} = (a; b)$. Dans cette partie on abusera des notations. Par exemple lorsque l'on dira que $z \rightarrow -z$ correspond à une symétrie centrale par rapport à l'origine. On supposera que z est l'affixe d'un point M, $-z$ est l'affixe d'un point M' et M' est le symétrique centrale de M par rapport à l'origine.

3.1 Translations

On comprend ainsi qu'ajouter un nombre complexe $z = a + ib$ revient géométriquement à faire une translation d'un vecteur $\vec{u} = (a; b)$.
Soient deux points A, B d'affixes respectifs z_A, z_B. Alors $z_B - z_A$ représente l'affixe du vecteur $\vec{AB}$.

3.2 Symétries

1. $z \rightarrow \overline{z}$ correspond à une symétrie axiale selon l'axe des abscisses.
2. $z \rightarrow -z$ correspond à une symétrie centrale par rapport à l'origine.

3.3 Rotations

On considère trois points A, B, C d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C.
Notons α l'angle entre les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
Alors $\alpha = arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})[2\pi]$ où arg correspond à l'argument du nombre complexe.

Enfin $z \rightarrow z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$ correspond à une rotation de centre A et d'angle θ.

4 Astuces

4.1 Calculs de quotients

Supposons que l'on souhaite donner la forme algébrique d'un nombre $\frac{z_1}{z_2}$. On ne souhaite pas avoir z_2 au dénominateur... Une astuce de calcul pour supprimer la fraction est la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{|z_2|^2}}_{\text{Un simple nombre réel}} \times z_1 \times \overline{z_2}\end{aligned}$$

Exemple pour le lecteur Donner la forme algébrique des nombres complexes $\frac{3-2i}{1+i}$, $\frac{1}{2i}$ et $\frac{\frac{3-2i}{1+i}}{\frac{1}{2i}}$.

4.2 Formules d'Euler

On rappelle les formules d'Euler : $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$.

Exemple : Linéarisation de $cos^4(\theta)$, autrement dit exprimons $cos^4(\theta)$ sans faire intervenir de puissance.

$$\begin{aligned}cos^4(\theta) &= (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^4 \\ &= \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4}{16} \\ &= \frac{e^{4i\theta}+4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} \qquad \text{(par formule du binôme de Newton)} \\ &= \frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} + \frac{4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+4e^{-3i\theta}e^{i\theta}}{16} + \frac{6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}}{16} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} + \frac{6}{16} \\ &= \frac{1}{8}cos(4\theta) + \frac{1}{2}cos(2\theta) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$