Leçon 11 : Trigonométrie. Applications.

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

N'apprenez plus sans comprendre

Niveau : Transversal, de la 3ème à la terminale.

Prérequis :

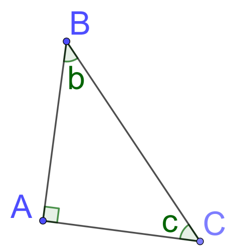
— Repérage cartésien dans le plan
— Résolution d'équation
— Fonctions et dérivés
— Nombres complexes et congruences

1 Trigonométrie dans le triangle rectangle

1.1 Définitions

Définition : On considère un triangle ABC rectangle en A.
On définit les valeurs $cos(b)$, $sin(b)$, $cos(c)$, $sin(c)$, $tan(b)$ et $tan(c)$ par :

$$cos(b) = \frac{AB}{BC} \qquad sin(b) = \frac{AC}{BC} \qquad tan(b) = \frac{AC}{AB}$$
$$cos(c) = \frac{AC}{BC} \qquad sin(c) = \frac{AB}{BC} \qquad tan(c) = \frac{AB}{AC}$$



Un moyen mnémotechnique de retenir ces résultats est :

$$cos(b) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad sin(b) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad tan(b) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Une question : On a définit ci-dessus le cosinus, sinus et tangente d'un angle. Dans ce cas pourquoi ne pas considérer deux demi-droites partant d'un même point plutôt qu'un triangle rectangle ? Que se passe t'il si l'orientation et/ou les dimensions du triangle rectangle changent ?

1.2 Applications

1.2.1 Produit scalaire

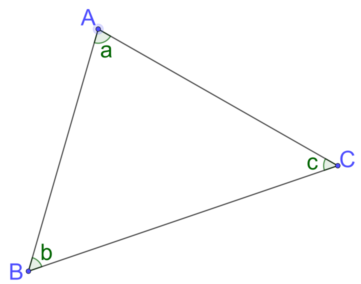
Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On définit le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $< \vec{u}, \vec{v} >$, par :

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \|u\| \times \|x\| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$$

La notion de produit scalaire étant extrêment vaste et constituant une leçon en elle-même, nous en resterons là. Il est toutefois nécessaire de l'introduire car essentielle dans la démonstration de résultats ci-dessous.

1.2.2 Théorème d'Al-Kashi ou de Pythagore généralisé

On considère un triangle ABC quelconque.



On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times cos(c) \\
AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times cos(b) \\
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos(a)
\end{aligned}$$

Démonstration : On montrera uniquement le premier résultat, les deux autres se montrant de la même manière.

On calcule le produit scalaire $< \vec{AB}, \vec{AB} >$ de deux manières différentes :

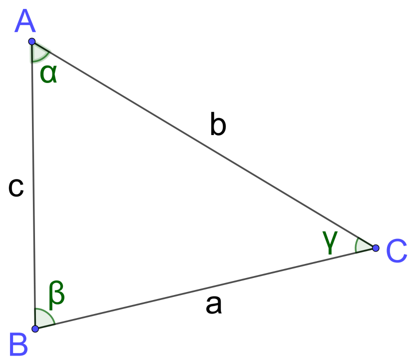
1. $< \vec{AB}, \vec{AB} >= \|AB\|^2 = AB^2$

2.

$$\begin{aligned}
< \vec{AB}, \vec{AB} > &=< \vec{AC} + \vec{CB}, \vec{AC} + \vec{CB} > \\
&=< \vec{AC}, \vec{AC} > + < \vec{AC}, \vec{CB} > + < \vec{CB}, \vec{AC} > + < \vec{CB}, \vec{CB} > \\
&= \|AC\|^2 + \|CB\|^2 + 2 < \vec{AC}, \vec{CB} > \\
&= AC^2 + BC^2 - 2 < \vec{CA}, \vec{CB} > \\
&= AC^2 + BC^2 - 2\|CA\|\|CB\| cos(\vec{CA}, \vec{CB}) \\
< \vec{AB}, \vec{AB} > &= AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times cos(c)
\end{aligned}$$

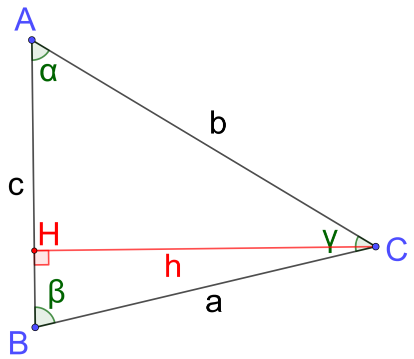
Finalement : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times cos(c)$

1.2.3 Loi des sinus



Dans un triangle ABC quelconque, on a les égalités suivantes : $\frac{sin(\alpha)}{a} = \frac{sin(\beta)}{b} = \frac{sin(\gamma)}{c}$

Démonstration : On trace en rouge la hauteur issue en C du triangle ABC.



D'une part : $sin(\beta) = \frac{h}{a}$. D'autre part : $sin(\alpha) = \frac{h}{b}$.

On en déduit :

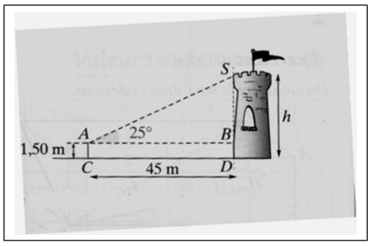
$$
\begin{aligned}
h &= sin(\beta) \times a \\
h &= \frac{sin(\beta) \times a}{a \times b} \\
h &= \frac{sin(\beta)}{b}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
h &= sin(\alpha) \times b \\
h &= \frac{sin(\alpha) \times b}{a \times b} \\
h &= \frac{sin(\alpha)}{a}
\end{aligned}
$$

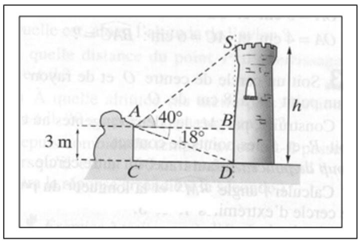
On trouve la dernière égalité en raisonnant de la même manière sur une autre hauteur.

1.3 Exercices

1.3.1 Exercice 1 (Un calcul de longueur) :

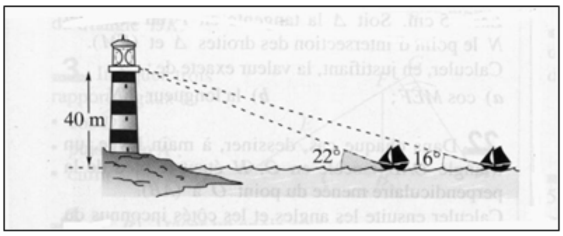
Calculer la hauteur de chaque tour



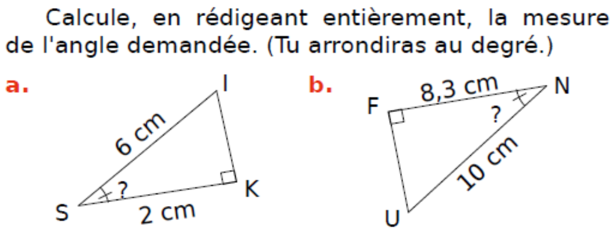


1.3.2 Exercice 2 (Un autre calcul de longueur) :

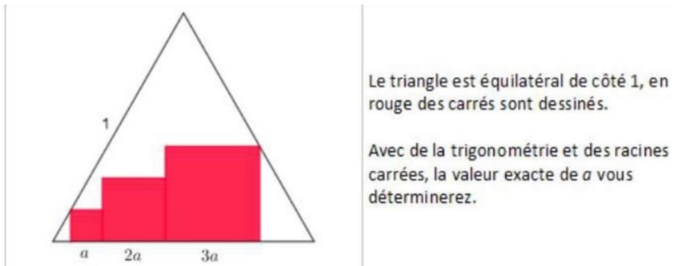
Quelle est la distance séparant les deux bateaux ?



1.3.3 Exercice 3 (Un calcul d'angle) :



1.3.4 Exercice 4 (Une équation à modéliser) :



1.3.5 Exercice 5 (Une démonstration élégante avec des "outils du collège") :

Démontrer la formule de duplication $sin(2a) = 1 - 2sin^2(a)$ en utilisant uniquement les résultats de collège sur la trigonométrie et une figure adéquate que vous déterminerez.

2 Cercle trigonométrique

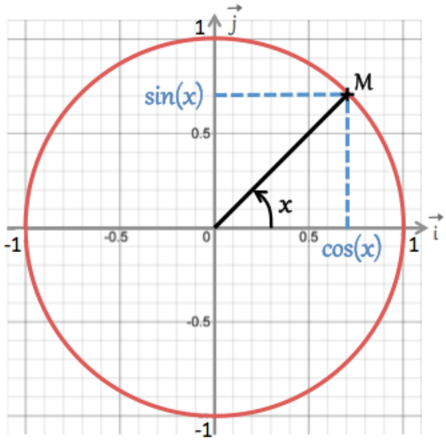
2.1 Définitions et premiers résultats

Définition : Dans un repère orthonormé classique $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.

Remarque importante : Le cercle trigonométrique peut être obtenu en enroulant la droite réelle. Ainsi plusieurs nombres réels seront représentés par un même point sur le cercle trigonométrique.

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit M le point représentant le nombre x sur le cercle trigonométrique.

— Le nombre $cos(x)$ est l'abscisse du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
— Le nombre $sin(x)$ est l'ordonnée du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



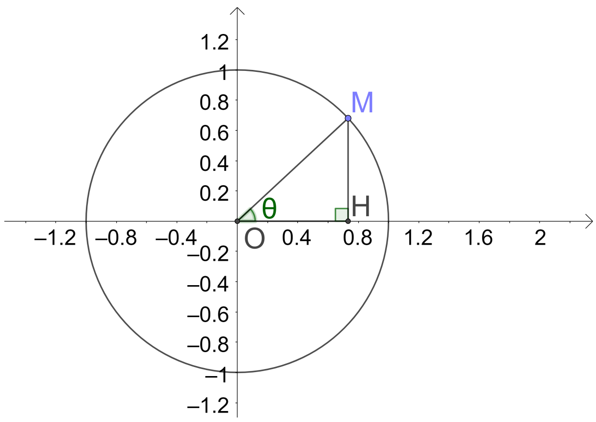
Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

— $-1 \leq cos(x) \leq 1$
— $-1 \leq sin(x) \leq 1$

Démonstration : Le résultat est graphiquement évident.

Propriété : Pour tout $\theta \in \mathbb{R},\ cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

Démonstration :



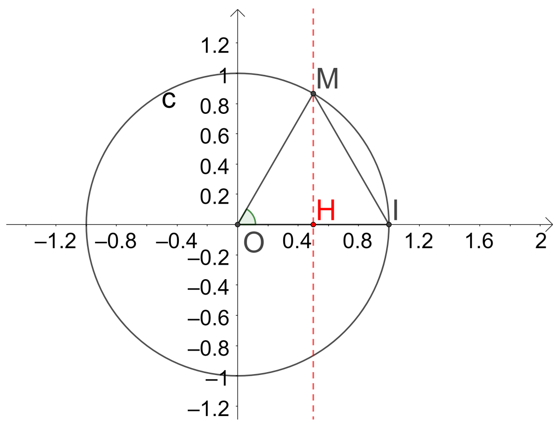
Le triangle OHM est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore : $OH^2 + HM^2 = OM^2 \Leftrightarrow cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$.

Propriété :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

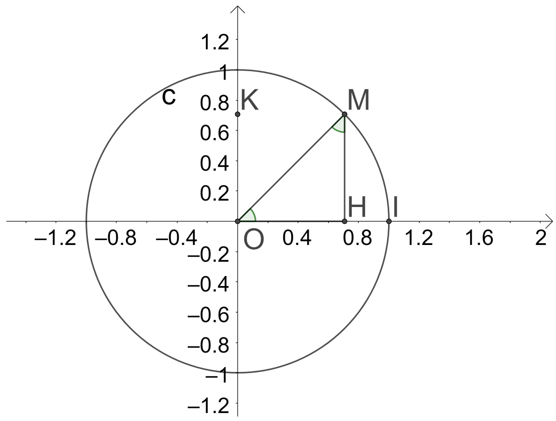
Démonstration : On considère le repère (O, I, J) et le point $M(x)$ sur le cercle trigonométrique.

- Pour $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$ les résultats sont évidents sur un cercle trigonométrique.
- Pour $x = \frac{\pi}{3}$,



Le triangle OIM est équilatéral. On en déduit que la droite (HM) est la médiatrice de [OI] et donc $cos(x) = \frac{1}{2}$.
On détermine $sin(x)$ en utilisant : $cos^2(x)+sin^2(x) = 1$ et $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$. Finalement, $sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

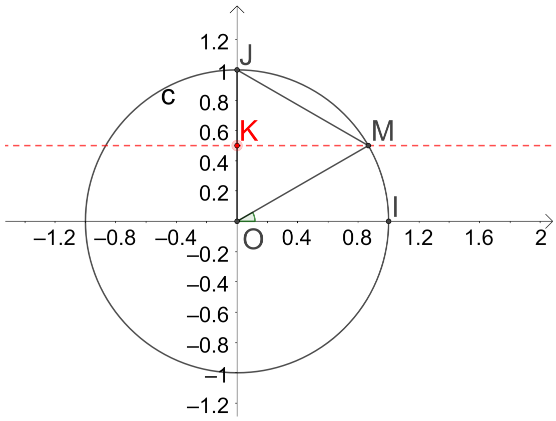
— Pour $x = \frac{\pi}{4}$,



Les angles $\langle HOM \rangle$ et $\langle OMH \rangle$ sont de mêmes mesures. On en déduit que le triangle OHM est isocèle en H.
Ainsi $OH = HM \Leftrightarrow cos(\frac{\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4})$.

$$\begin{aligned} cos^2(\frac{\pi}{4}) + sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1 &\Leftrightarrow 2cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1 \\ &\Leftrightarrow cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow cos(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

— Pour $x = \frac{\pi}{6}$,



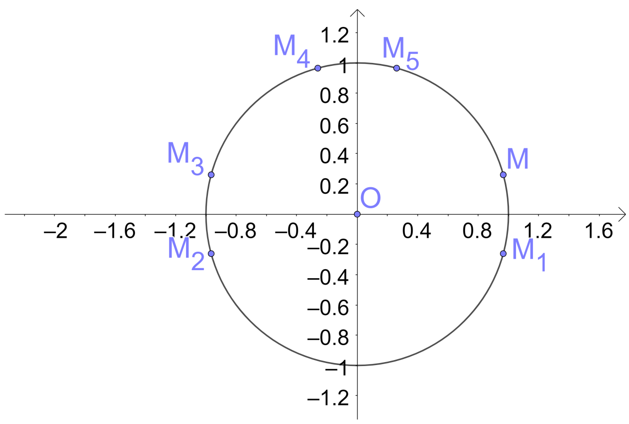
Ce cas se traite de la même manière que $x = \frac{\pi}{3}$.

Le triangle OMJ est équilatéral, on en déduit $sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriété : Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $cos(x)$ et $sin(x)$ sont connus, alors on connaît également les valeurs suivantes en fonction de $cos(x)$ et $sin(x)$.

$cos(-x) = cos(x)$	$sin(-x) = -sin(x)$
$cos(x+\pi) = -cos(x)$	$sin(x+\pi) = -sin(x)$
$cos(\pi - x) = -cos(x)$	$sin(\pi - x) = sin(x)$
$cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$	$sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$
$cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x)$	$sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x)$

Démonstration :



1. $M_1(-x)$ est obtenu par symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses du point $M(x)$. On en déduit les résultats énoncés.

2. $M_2(x+\pi)$ est obtenu par symétrie centrale par rapport au point O du point $M(x)$. On en déduit les résultats énoncés.

3. $M_3(\pi - x)$ est obtenu par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées du point $M(x)$. On en déduit les résultats énoncés.

4. $M_4(\frac{\pi}{2} + x)$ est obtenu par rotation d'angle 90 degré autour du point O du point $M(x)$. On en déduit les résultats énoncés.

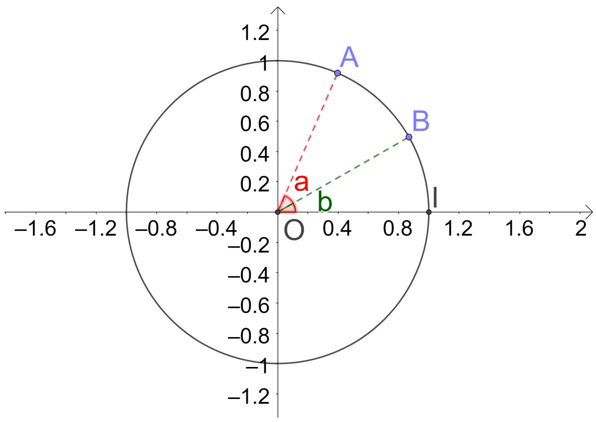
5. $M_5(\frac{\pi}{2} - x)$ est obtenu par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées du point $M_4(\frac{\pi}{2} + x)$. On en déduit les résultats énoncés.

2.2 Formules d'additions et de duplication

Propriété (formules d'addition) : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :

1. $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
2. $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$
3. $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$
4. $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$

Démonstration : Démontrons dans un premier temps le deuxième résultat :



Calculons $< \vec{OA}, \vec{OB} >$ de deux manières différentes :

1. $< \vec{OA}, \vec{OB} >= \|OA\| \times \|OB\| \times cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = 1 \times 1 \times cos(a-b) = cos(a-b)$
2. $< \vec{OA}, \vec{OB} >= cos(a) \times cos(b) + sin(a) \times sin(b)$ (formule du produit scalaire avec les coordonnées)

Conclusion : $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$

Nous pouvons maintenant démontrer le premier résultat :

$$\begin{aligned}
cos(a+b) &= cos(a-(-b)) \\
&= cos(a) \times cos(-b) + sin(a)sin(-b) \text{ (D'après le résultat démontré précédemment)} \\
&= cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) \text{ (Par parité de cos et imparité de sin)}
\end{aligned}$$

Montrons à présent le troisième résultat :

$$\begin{aligned}
sin(a+b) &= cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) \text{ (D'après tableau page 10)} \\
&= cos((\frac{\pi}{2} - a) - b) \\
&= cos(\frac{\pi}{2} - a) \times cos(b) + sin(\frac{\pi}{2} - a) \times sin(b) \text{ (D'après la deuxième formule d'addition)} \\
&= sin(a) \times cos(b) + cos(a) \times sin(b) \text{ (D'après tableau page 10)}
\end{aligned}$$

Montrons enfin le quatrième et dernier résultat :

$$\begin{aligned}
sin(a-b) &= sin(a+(-b)) \\
&= sin(a)cos(-b) + sin(-b)cos(a) \text{ (D'après la troisième formule d'addition)} \\
&= sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a) \text{ (Par parité de cos et imparité de sin)}
\end{aligned}$$

Propriété (formules de duplication) : Pour tout $a \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

1. $cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = 1 - 2sin^2(a)$
2. $sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$

Démonstration : On utilise les formules d'addition avec $a = b$.

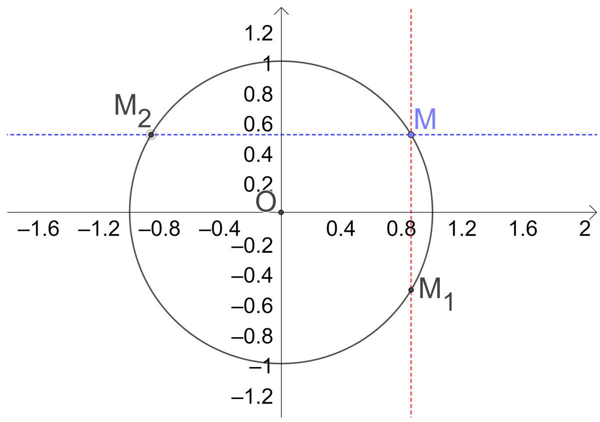
2.3 Résolutions d'équations et inéquations

A l'aide du cercle trigonométrique, il est possible de résoudre des équations et inéquations de manière graphique très rapidement.

2.3.1 Les cas simples $cos(x) = a$; $sin(x) = b$; $cos(x) < a$ etc.

On considère deux nombres réels a et b connus. On cherche à résoudre les équations $cos(x) = a$ et $sin(x) = b$; ou des inéquations $cos(x) < a$ etc ; dans I où I est un intervalle réel non vide et non réduit à un singleton.
Ces équations et inéquations se résolvent aisément de manière graphique.

2.3.2 $cos(x) = cos(y)$ et $sin(x) = sin(y)$



On considère un point $M(x)$ sur le cercle trigonométrique. On cherche y tel que $cos(x) = cos(y)$. Un point P(y) sur le cercle trigonométrique vérifie la condition recherchée si et seulement si $P = M$ ou $P = M_1$.
On en déduit : $y = x + 2k\pi$ ou $y = -x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

De la même manière si l'on cherche y tel que $sin(x) = sin(y)$, un point P(y) sur le cercle trigonométrique vérifie la condition recherchée si et seulement si $P = M$ ou $P = M_2$.
On en déduit $y = x + 2k\pi$ ou $y = (\pi - x) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.4 Exercices

2.4.1 Exercice 1 :

Calculer $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$.

2.4.2 Exercice 2 :

Résoudre $cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.
Résoudre $cos(3x - \frac{\pi}{6}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

2.4.3 Exercice 3 :

Résoudre $sin(3x - \frac{\pi}{3}) = sin(2x + \frac{\pi}{30})$.

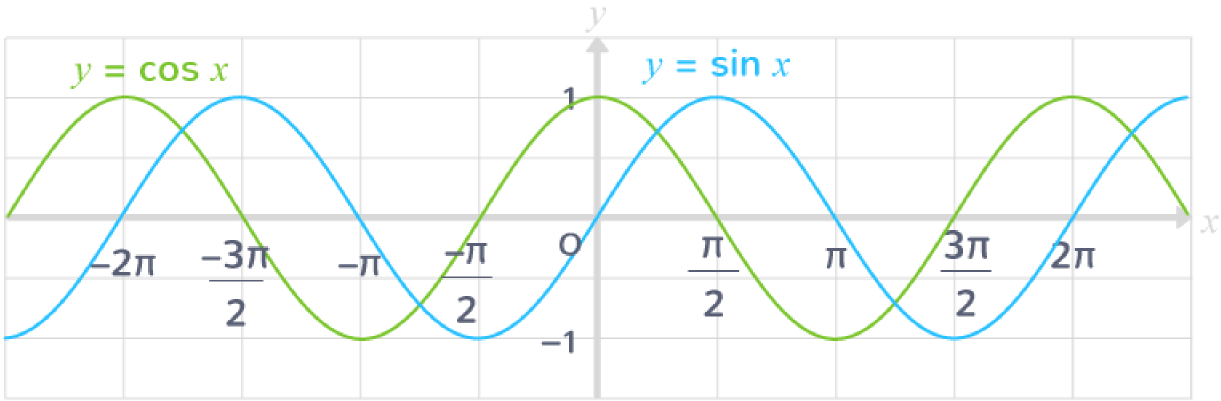
2.4.4 Exercice 4 :

On considère un repère orthonormé (O, I, J).

1. Tracer un cercle trigonométrique et placer les points I, J et $M(\frac{\pi}{4})$ sur le cercle trigonométrique.
2. Donner les coordonées du point M dans le repère orthonormé.
3. Calculer la distance IM.
4. (a) Démontrer que $IM = 2 \times sin(\frac{\pi}{8})$.
   (b) En déduire la valeur de $sin(\frac{\pi}{8})$.
5. Calculer $cos(\frac{\pi}{8})$.
6. En déduire les lignes trigonométriques de : $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$.

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Graphes des fonctions



3.2 Parité et périodicité

Définitions :

1. On dit qu'une fonction f est paire sur $\mathbb{R}$ si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$
2. On dit qu'une fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$ si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$
3. On dit qu'une fonction f est périodique $\mathbb{R}$ si : $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$

Propriétés :

1. La fonction cos est périodique de période 2π et paire.
2. La fonction sin est périodique de période 2π et impaire.

Démonstration : Ces résultats sont évidents à l'aide des définitions de cos et sin sur le cercle trigonométrique.

3.3 Dérivés

Propriétés : Les fonctions cos sont sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a les résultats suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ cos'(x) = -sin(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ sin'(x) = cos(x)$

Démonstration : On utilise la définition de cos et sin via les séries entières.

On rappelle ces définitions : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

— $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

— $sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

On rappelle qu'une série entière est dérivable termes à termes sur son disque ouvert de convergence. On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
sin'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!})' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times (2n+1) \times x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times x^{2n}}{(2n)!} \\
&= cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cos'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!})' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times (2n) \times x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \times (2n) \times x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \times x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \times x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= (-1) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= -sin(x)
\end{aligned}$$

Remarque : Ici le théorème de dérivation sous le signe $\sum$ a été utilisé sans vérifications car il s'agit d'un résultat classique sur les séries entières. Il est cependant nécessaire de connaître les hypothèses de ce théorème (et de les vérifier) dans le cadre général d'une série de fonction.

Question : Ce cours comporte plusieurs définitions de cos et sin (Dans un triangle rectangle, sur un cercle trigonométrique, série entière, etc.). Comment montrer que ces définitions sont équivalentes ?

3.4 Exercices

Exercice 1 : Etudier la fonction tangente.

Exercice 2 : Tracer la courbe paramétrée C définit pour tout t réel par :

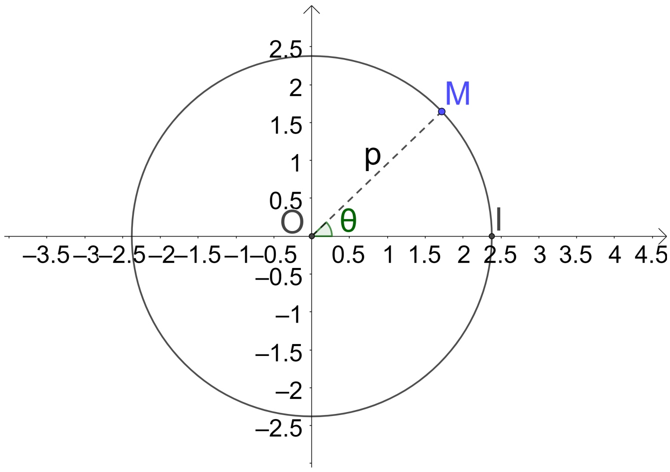
— $x(t) = 1 + 2cos(t) + cos(2t)$

— $y(t) = 2sin(t) + sin(2t)$

4 Trigonométrie à l'aide des nombres complexes

4.1 Définitions :

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, un unique $\theta \in [-\pi;\pi[$ tel que $z = \rho \times (cos(\theta) + i \times sin(\theta))$. On appelle cette écriture l'écriture trigonométrique de z.



Définition :
On définit l'exponentielle complexe ; notée $e^{i\theta}$; par $e^{i\theta} = cos(\theta) + i \times sin(\theta)$
Ainsi pour $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle écriture exponentielle de z l'écriture : $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi;\pi[$.

Remarque : On peut écrire pour $\theta \in [-\pi;\pi[$,

— $cos(\theta) = Re(e^{i\theta})$

— $sin(\theta) = Im(e^{i\theta})$

4.2 Propriétés fondamentales de calcul

4.2.1 Formule de Moivre

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\theta \in [-\pi;\pi[$. $e^{in\theta} = cos(n\theta) + i \times sin(n\theta)$.

Démonstration : Il s'agit de l'écriture exponentielle appliquée à $n\theta$ au lieu de θ.

4.2.2 Formule d'Euler

Soit $\theta \in [-\pi; \pi[$. On a les résultats suivants :

— $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

— $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration : Soit $\theta \in [-\pi; \pi[$.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} &= \frac{cos(\theta)+i\times sin(\theta)+cos(-\theta)+i\times sin(-\theta)}{2} \\
&= \frac{cos(\theta)+i\times sin(\theta)+cos(\theta)-i\times sin(\theta)}{2} \\
&= \frac{2cos(\theta)}{2} \\
&= cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{cos(\theta)+i\times sin(\theta)-(cos(-\theta)+i\times sin(-\theta))}{2i} \\
&= \frac{cos(\theta)+i\times sin(\theta)-cos(-\theta)-i\times sin(-\theta)}{2i} \\
&= \frac{cos(\theta)+i\times sin(\theta)-cos(\theta)+i\times sin(\theta)}{2i} \\
&= \frac{2i\sin(\theta)}{2i} \\
&= sin(\theta)
\end{aligned}$$

4.3 Exercices

4.3.1 Exercice 1 :

Soit $\theta \in [-\pi; \pi[$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer astucieusement ; en se remémorant la somme des termes d'une suite géométrique ; la grandeur $\sum\limits_{k=0}^{n} cos(k\theta)$.

4.3.2 Exercice 2 :

En linéarisant $cos^5(x)$, calculer $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5(x)dx$

4.3.3 Exercice 3 (Méthode de Cardan) :

L'objectif de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$.

1. En posant $x = u + v$, ré-écrire l'équation. Montrer que l'on cherche à résoudre le système :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u^3 \times v^3 = 1 \end{cases}$$
2. En posant $U = u^3$ et $V = v^3$ quelles sont les valeurs de U et V ?
3. En utilisant la condition $uv = 1$. En déduire les valeurs possible de u et v.
4. Donner les solutions de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$