Leçon 33 : Suites récurrentes d'ordre 1, $u_{n+1} = f(u_n)$

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

N'apprenez plus sans comprendre

Niveau : Première et terminale spécialité / maths expertes
Prérequis : Connaisances sur les suites, les limites et les fonctions

1 Introduction

On rappelle qu'une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. De manière générale une suite permet de représenter une grandeur qui évolue de manière discrète. L'objectif de cette leçon est d'étudier les suites particulières dites **suites récurrentes d'ordre 1** . Ce type de suite permet de représenter une grandeur qui évolue de manière discrète uniquement par rapport à sa dernière valeur. Ce type de grandeur est extrêment courant, il convient donc d'étudier proprement la théorie et quelques applications pertinentes.

2 Suites arithmétiques et géométriques

2.1 Suites arithmétiques

2.1.1 Définitions par récurrence et de manière explicite

Définition : Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison r si $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Propriété (Expression explicite) : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Soit $p \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p + (n-p) \times r$

Démonstration : Cette démonstration est importante car elle constitue l'exemple prototypique de raisonnement par récurrence.

Soit $p \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence sur $n \geq p$ l'hypothèse de récurrence HR_n : "$u_n = u_p + (n-p) \times r$"

Initialisation : Pour $n = p, u_p = u_p + (p-p) \times r$ ainsi HR_p est vérifié.

Hérédité : Soit $n \geq p$, on suppose HR_n vraie. Montrons que HR_{n+1} est également vraie.

(u_n) étant une suite arithmétique de raison r, on a les résultats suivants :

$u_{n+1} = u_n + r$
Par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = u_p + (n-p) \times r + r$
Finalement $u_{n+1} = u_p + (n+1-p) \times r$. HR_{n+1} est ainsi vérifié.

Conclusion : L'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n = p$ et est héréditaire. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p) \times r$

2.1.2 Monotonie

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante.
Si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
Si $r = 0$ alors la suite est constante.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$
Il est évident que le signe de r détermine la monotonie de la suite.

2.1.3 Limites

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
Si $r = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'écrire $u_n = u_0 + n \times r$ et de faire tendre n vers $+\infty$.

2.1.4 Sommes de termes consécutifs

Pour démontrer le résultat sur les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Démonstration 1 : Ce résultat peut être démontré par récurrence et est laissé en exercice.

Démonstration 2 : Par un regroupement astucieux trouvé par Gauss en école primaire !

$$\begin{aligned}
S + S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} n - k + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + (n - k + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} n + 1 \\
2S &= n \times (n + 1)
\end{aligned}$$

En conclusion : $S = 1 + 2 + ... + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1) \times (u_0 + u_n)}{2}$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$,
On rappelle que $u_k = u_0 + k \times r$ pour $k \in 0, ..., n$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + ... + u_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_0 + n \times r \\
&= (n+1) \times u_0 + r \times \sum_{k=0}^{n} k \\
&= (n+1) \times u_0 + r \times \frac{n \times (n+1)}{2} \\
&= (n+1) \times \frac{(2u_0 + n \times r)}{2} \\
&= (n+1) \times \frac{(u_0 + (u_0 + n \times r))}{2} \\
&= (n+1) \times \frac{(u_0 + u_n)}{2}
\end{aligned}$$

2.1.5 Exercice tiré de Sésamaths

Un groupe d'enfants décide de construire la plus haute tour en briques possible.
La tour a initialement une hauteur de 40cm. Chaque enfant rajoute à la tour un étage de 2cm.
On note u_n la hauteur de la tour en cm après le passage de n enfants. On a $u_0 = 40$

1. Déterminer la valeur de u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Quelle est la hauteur de la tour après le passage de 15 enfants.
5. Combien faut-il de passages pour que la tour mesure 1m ?

2.2 Suites géométriques

2.2.1 Définitions par récurrence et de manière explicite

Définition : Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison q si $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$.

Propriété (Expression explicite) : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Soit $p \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence de la même manière que pour les suites arithmétiques.

2.2.2 Monotonie

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
$q > 1$	(u_n) est une suite croissante	(u_n) est une suite décroissante
$q = 1$	(u_n) est une suite constante	(u_n) est une suite constante
$q \in [0, 1[$	(u_n) est une suite décroissante	(u_n) est une suite croissante
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone	(u_n) n'est pas monotone

Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^n \times (q-1)$

1. Si $q = 1$ la suite est évidement constante.
2. Si $q < 0$ d'un terme à l'autre il y a changement de signe donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.
3. Si $q > 1$ le signe de $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que u_0 donc si $u_0 > 0$ la suite est croissante et décroissante sinon.
4. Si $q \in [0, 1[$ le signe de $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $-u_0$ donc si $u_0 > 0$ la suite est décroissante et croissante sinon.

2.2.3 Limites

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
$q > 1$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
$q = 1$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0$
$q \in]-1, 1[$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$
$q \leq -1$	(u_n) n'a pas de limite	(u_n) n'a pas de limite

Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$

1. Si $q = 1$ la suite converge évidement vers u_0.
2. Si $q \leq -1$, d'un terme à l'autre il y a changement de signe et en valeur absolu les termes deviennent de plus en plus grand donc la suite n'a pas de limite.
3. Si $q > 1$ q^n tend vers $+\infty$ donc la suite admet une limite et cette limite est déterminé par le signe de u_0, si $u_0 > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ sinon $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
4. Si $q \in]-1, 1[$ q^n tend vers 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2.2.4 Sommes de termes consécutifs

Pour démontrer le résultat sur les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique nous aurons besoin du Lemme suivant :

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$, $n+1$ sinon.

Démonstration :

Si $q = 1$ le résultat est évident.

Si $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(1-q) \times \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\
&= 1 - q^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} q^k - q^k \\
&= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

Finalement, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $q \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Sinon $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times (n+1)$

Démonstration :

Si $q = 1$ le résultat est évident.

Si $q \neq 1$,

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_0 \times q^k \\ &= u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

2.2.5 Exercice tiré de Sésamaths

Aurélien décide de partir de Paris et d'aller à Stockholm en vélo. Il doit parcourir 2 000km.
Le premier jour, il parcourt 20km. Chaque jour, il parcourt 5km de plus que le jour précédent.
On note u_n la distance parcourue le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 20$

1. Quelle distance parcourt-il le deuxième jour ?
2. Exprimer u_n en fonction de n, en justifiant.
3. On note s_n la distance parcourue au total depuis le début du parcours, le n-ième jour au soir.
   (a) Déterminer la valeur de s_1 et s_2.
   (b) Exprimer s_n en fonction de n.
4. A l'aide de la calculatrice, détermnier au bout de combien de jours Aurélien aura parcouru les 2 000km et sera arrivé à Stockholm.

3 Représentation graphique et propriétés dans un cadre général

3.1 Représentation graphique

4 Représenter graphiquement une suite

Cours 1 p. 48

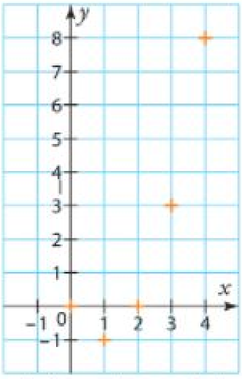
1. Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n$.

2. Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$.

Solution

1. Par calcul, ou à l'aide de la calculatrice, on détermine les 5 premiers termes. **1**

On a $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 3$ et $u_4 = 8$. **2**



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$. **3**

On place u_0 sur l'axe des abscisses.

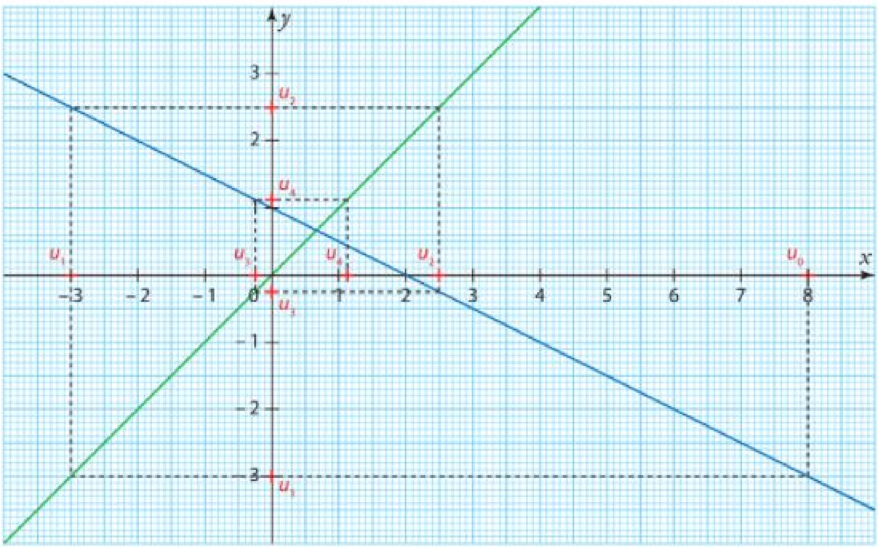
Conseils & Méthodes

1 Il faut différencier si la suite est définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence.

2 Pour représenter graphiquement une suite définie par une formule explicite (u_n en fonction de n), on calcule les premiers termes, puis on place les points de coordonnées (n ; u_n) dans un repère.

3 Pour représenter graphiquement une suite définie par une relation de récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$) on trace la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Il faut ensuite représenter les termes de la suite un par un.

Pour obtenir la valeur de u_1, on cherche l'image de u_0 par la fonction f. On obtient donc la valeur de u_1 sur l'axe des ordonnées. Pour continuer la représentation graphique, il faut avoir la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses. Pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$. Puis, pour obtenir u_2, on cherche l'image de u_1 par la fonction f. Et ainsi de suite.



3.2 Propriétés sur la monotonie de la fonction f

Les propriétés qui vont être énoncées ne sont plus au programme mais peuvent être utiles et facilement démontrables.

Propriété : Soit f une fonction définie de I dans I avec I un intervalle réel non vide et non réduit à un singleton. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Si f est croissante alors (u_n) est une suite monotone.
2. Si f est décroissante alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Démonstration :

1. Supposons que f est une fonction croissante de I dans I.

   Supposons que $u_1 \geq u_0$, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence HR_n "$u_{n+1} \geq u_n$".

   Initialisation : Le résultat est vrai pour n = 0 par énoncé.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vraie, montrons que HR_{n+1} est également vraie.

   Par hypothèse de récurrence $u_{n+1} = u_n$

   f étant croissante, on a : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ c'est-à-dire : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ HR_{n+1} est donc vraie.

   Conclusion : HR_0 est vraie et la propriété est héréditaire. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   Si $u_1 \leq u_0$ par le même raisonnement on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

2. Supposons f décroissante alors $f \circ f$ est une fonction croissante. On en déduit de ce qui est a été fait précédemment que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

3.3 Exercice classique de terminale tiré de Sésamaths

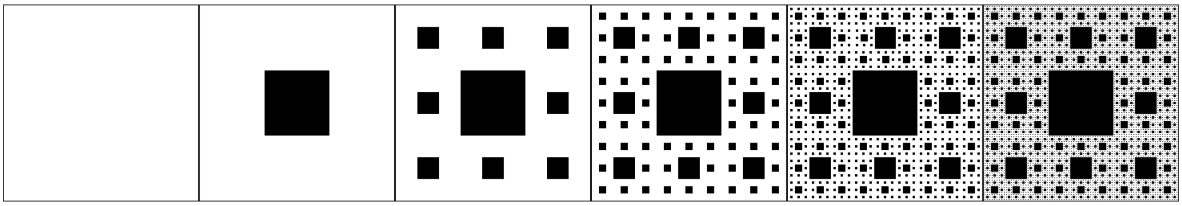
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ pour tout $n \geq 1$

4 Applications / Exercices

4.1 Suites arithmético-géométrique

Dans cette sous partie sur les suites arithmético-géométriques, on suppose que les élèves ont déjà rencontré la méthode pour étudier une telle suite en faisant intervenir une suite auxiliaire. L'intérêt des exercices qui vont suivre, outre de montrer que les suites arithmético-géométriques sont utiles dans de nombreux domaines, est la phase de modélisation.

4.1.1 Tapis de Sierpinski



L'image ci-dessus représente les six premières étapes de la construction du tapis de Sierpinski. Pour construire ce tapis on procède de la manière suivante :

1. A l'étape 0, on considère un carré entièrement blanc de côté 1.
2. A l'étape 1, On divise le carré précédent en 9 et on colorie le centre en noir.
3. A l'étape n+1, On reprend le résultat de l'étape n, on divise tous les carrés blancs en 9 et on colorie les centres en noir.

On pose la suite (u_n) représentant l'aire noire totale à l'étape n.

Déteminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une valeur de u_n.

4.1.2 Téléphone arabe binaire

On considère des individus $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ qui se transmettent une information dans cet ordre. L'information est considérée soit vraie soit fausse. Intialement la première personne a l'information vraie. Chaque individu transmet son information de manière fiable à 99 pourcents et la change en son contraire à 1 pourcent.

On pose l'évènement A_n "la n-ième personne a reçu la vraie information". On pose la suite $(p_n) = (P(A_n))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une formule explicite de p_n.

4.2 Suite harmonique

On considère la suite H_n définie par : $H_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1, H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$

1. Monter que pour tour $n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
2. Montrer que pour tour $n \geq 1, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$
3. Que peut-on dire de l'éventuelle limite de (H_n) ?
4. En encadrant chaque termes de la somme par des intégrales, en déduire un encadrement de H_n pour tout $n \geq 1$

4.3 Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq W_n \leq \pi/2$
2. Montrer que (W_n) est une suite décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une formule de récurrence entre W_n et W_{n+2}
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une formule explicite de W_{2n} et W_{2n+1}

4.4 Méthodes numériques

4.4.1 Méthode d'Euler

Un bon exercice permettant de travailler la méthode d'Euler est un sujet de CAPES de 2016, il s'agit plus précisément du problème 1 de la seçonde épreuve.

https://capes-math.org/index.php?id=archives

4.4.2 Méthode de Newton

L'objectif de la méthode de Newton est de trouver une solution approchée à une équation du type $f(x) = 0$.

On se place dans un cadre favorable à cette méthode.

On considère une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On suppose de plus : $f(a) < 0, f(b) > 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

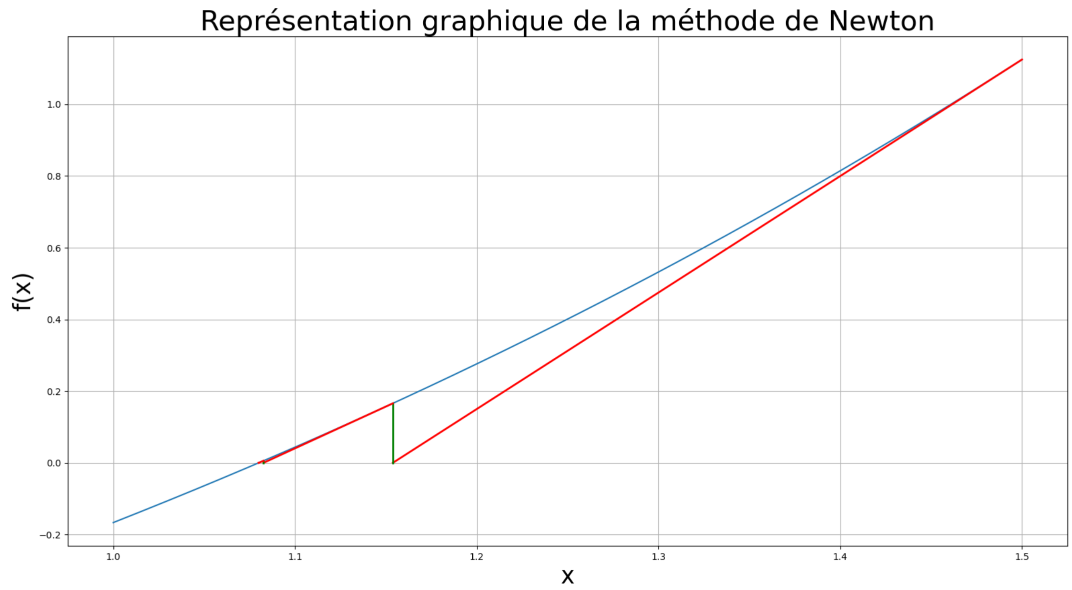
On définie la suite (x_n) par : $x_0 \in [\alpha, b]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

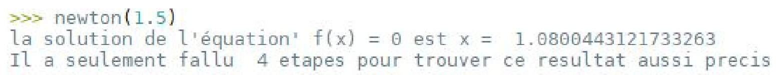
1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers α.

3. Soit $x \in [\alpha, b]$. En admettant qu'il existe $c_x \in [\alpha, b]$ tel que $f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x) \times f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2} \times f''(c_x)$
   Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq k^{2^n} \times |b - \alpha|^{2^n}$ avec $k = \frac{M}{2\times m}$, avec $m = \min_{x\in[\alpha,b]} |f'(x)|$ et $M = \max_{x\in[\alpha,b]} |f''(x)|$
4. Montrer qu'en enlevant une des conditions d'application initiale, la méthode de Newton peut ne pas fonctionner.

Voici un exemple de programme Python et son exécution pour la fonction $f : x \to x^3 + x - 1.5$

```
from math import *
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def fonc(x):
    return (1.0/3.0)*x**3+x-1.5


def der(x):
    return x**2+1


def newton(x):
    n=0
    X=np.linspace(1,x,1000)
    Y=fonc(X)
    plt.plot(X,Y)
    while (abs(fonc(x))>10E-10):
        plt.plot([x-fonc(x)/der(x), x], [0, fonc(x)], 'r-', lw=2)
        n=n+1
        x=x-fonc(x)/der(x)
        plt.plot([x, x], [0, fonc(x)], 'g-', lw=2)

    return x

    plt.grid()
    plt.show()
```





```
>>> newton(1.5)
la solution de l'équation' f(x) = 0 est x =  1.0800443121733263
Il a seulement fallu  4 etapes pour trouver ce resultat aussi precis
```

4.5 Beauté et complexité des mathématiques

Cette partie traite de résultats mathématiques très complexes voir encore non démontrés. L'objectif de ces sujets est dans un premier temps de faire prendre conscience aux élèves que les mathématiques sont encore en vie, qu'il reste de nombreux sujets de recherches passionants. Dans un second temps, ces sujets sont propices à la recherche ainsi qu'à l'utilisation et la prise en main d'outils numériques. Enfin ces résultats très complexes sont obtenus à partir de formules extrêment simples et ceci dans un sens démontre la beauté des mathématiques.

4.5.1 Suite de Syracuse

On considère la suite (x_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$ si x_n est pair $x_{n+1} = 3x_n + 1$ sinon.

1. Ecrire un algorithme prenant en entrées x_0 et n un entier naturel et renvoyant la liste des n premiers termes.
2. En testant sur différentes valeurs de u_0 et n quelle conjecture pouvez vous faire ?
3. Ecrire un algorithme renvoyant le plus petit rang n tel que $x_n = 1$
4. Comment choisir x_0 pour que le plus petit rang n tel que $x_n = 1$ soit le plus élevé possible ?

4.5.2 Ensembles de Julia et ensemble de Mandelbrot

TICE 45 min — Chercher, Modéliser, Représenter

2 Ensembles de Julia, ensemble de Mandelbrot

Une fractale est un objet mathématique dont la structure est invariante par changement d'échelle.
Dans ce TP, nous allons étudiés les ensembles de Julia, nommés en l'honneur de Gaston Julia (XX^{e} siècle), qui sont un exemple de fractales. Ces ensembles sont construits à partir de suites de nombres complexes de premier terme z_0 et définies par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$ avec c un nombre complexe. Ces suites peuvent soit être bornées, soit diverger selon la valeur de z_0.
Un ensemble de Julia rempli est l'ensemble des valeurs de z_0 pour lesquelles la suite est bornée.
Benoit Mandelbrot a décidé d'étudier l'ensemble des valeurs de c tels que l'ensemble de Julia n'ait pas explosé en de multiples morceaux. Cet ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot.

A ▶ Étude sur un tableur

On souhaite déterminer si un nombre complexe z_0 appartient à l'ensemble de Julia rempli.
On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = |z_n|$.

1. Pour tout entier naturel n, on note $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ avec x_n et y_n deux réels.
Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. Reproduire le tableau ci-contre dans un tableur. Les cases violettes seront remplies par l'utilisateur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_0			n	x_n	y_n	u_n
2	y_0			0			
3	Re(c)			1			
4	Im(c)			2			
5				3			

a) Quelle formule faut-il rentrer dans les cellules E2 et F2, pour obtenir la valeur qui sera rentrée dans les cellules B1 et B2 ?

b) Déterminer les formules à rentrer dans les cellules E3, F3 et G2 pour obtenir par recopie vers le bas les valeurs de x_n, y_n et u_n.

3. On choisit $c = -1$. Déterminer deux valeurs de z_0 pour laquelle la suite (u_n) semble bornée et deux pour lesquelles elle ne semble pas bornée.

PYTHON Programme lienmini.fr/maths-e02-09

B ▸ Représentation graphique d'un ensemble de Julia

On souhaite représenter l'ensemble de Julia pour $c = -1$ à l'aide du programme **Python** ci-contre.
La fonction **Julia** a comme paramètre **P** (le nombre de valeurs de z_0 que l'on veut tester), et **N** le nombre maximal de termes de la suite (z_n) que l'on va calculer pour chaque valeur de z_0.
On admet que s'il existe un entier n_0 tel que $u_n > 2$, alors u_n n'est pas bornée.
Donc s'il existe un entier n_0 inférieur à N tel que $u_n > 2$, alors on n'affichera pas le point d'affixe z_0.

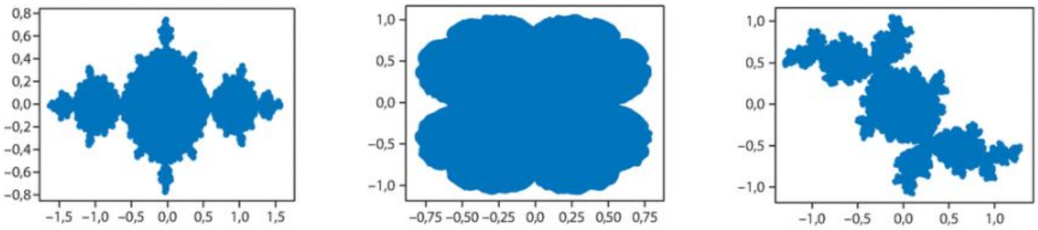
1. `random()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
Que renvoie `random()*4-2` ?

2. Tester ce programme pour :
a) $P = 1000$ et $N = 100$ **b)** $P = 100000$ et $N = 100$

3. Modifier ce programme pour représenter l'ensemble de Julia lorsque : **a)** $c = 0{,}25$ **b)** $c = -0{,}12 + 0{,}74\text{i}$.

Remarque En **Python**, i s'écrit 1j.

```python
from random import*
from math import*
from pylab import*
def Julia(P,N):
    LX=[]
    LY=[]
    for i in range(P):
        z0=random()*4-2+1j*(random()*4-2)
        z=z0
        k=0
        while (abs(z)<2 and k<N):
            k=k+1
            z=z**2-1
        if k==N:
            LX.append(z0.real)
            LY.append(z0.imag)
    scatter(LX,LY)
    show()
```



Se renseigner sur l'ensemble de Mandelbrot et écrire un algorithme permettant de le représenter.

4.5.3 Suite de Conway

Cet "exercice / travail de recherche" est un sujet classique dans des sujets mathématiques type MATh.en.JEANS et rend hommage à Monsieur John Conway décédé en 2020. On considère la suite (u_n) dont les premiers termes sont les suivants :
$u_0 = 1, u_1 = 11, u_2 = 21, u_3 = 1211, etc.$

Comment trouver les termes suivants de cette suite ? Est-il possible de trouver et démontrer des résultats sur cette suite ? Par exemple sur sa monotonie, sa limite si elle existe, les chiffres consituant chaque terme, etc ?