Fiche méthodologique : Déterminer une limite

Sébastien TAURAND

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

1 Introduction

Déterminer une limite fait partie intégrante de l'étude d'une suite ou d'une fonction. Connaître les différentes méthodes pour déterminer une limite est donc nécessaire.

Ce document présente une liste exhaustive rangée par ordre de complexité des différentes méthodes accessibles à un élève de Terminale souhaitant préparer le Baccalauréat ou des concours pour des écoles post-Bac.

Rappelons les deux définitions de la notion de limite rencontrées respectivement en Première et en Terminale. Pour l'exemple, on considérera des suites mais l'idée est la même pour des fonctions.

Définition version Première :

1. Une suite (u_n) converge vers un nombre réel l si tous les termes u_n se rapprochent aussi proche que voulu de l pour n suffisamment grand.
2. Une suite (u_n) diverge vers $\pm\infty$ si tous les termes u_n deviennent aussi grand/petit que l'on souhaite pour n suffisamment grand.

Définition version Terminale :

1. Une suite (u_n) converge vers un nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n pour n assez grand.
2. Une suite (u_n) diverge vers $\pm\infty$ si pour tout réel A, tous les termes u_n sont plus grand que A / tous les termes u_n sont plus petits que $-A$ pour n assez grand.

On utilisera la notation suivante pour dire par exemple que la suite (u_n) converge vers un réel l.

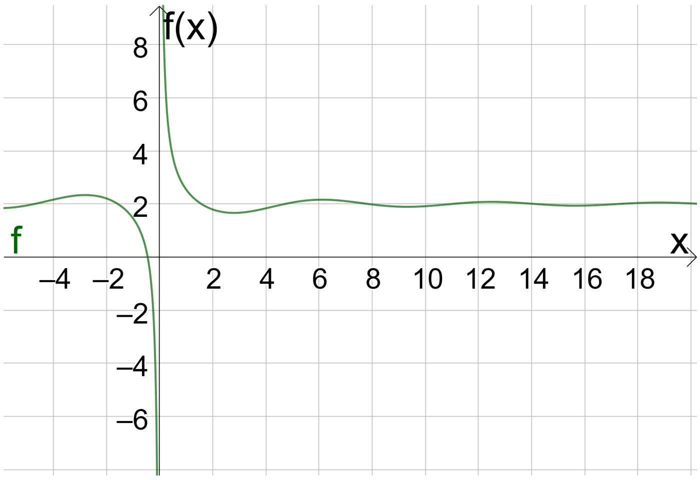
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

2 Déterminer une limite sans calculs

Dans cette partie on s'intéresse aux techniques qui ne nécessitent aucuns calculs. Ainsi ces méthodes n'ont aucunes valeurs mathématiques. Cela pourra néanmoins servir de vérification, de réponse directe dans le cadre de QCM non justifiés ou d'un élément de réponse si jamais vous n'avez pas réussi à justifier le résultat mathématiquement. Dans le dernier cas de figure il est vivement conseillé d'indiquer une mention du type : "**A l'aide d'une lecture graphique sur ma calculatrice**, je trouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$".

2.1 Sur un graphe

Les deux définitions données en introduction s'interprète graphiquement très facilement. Prenons comme exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{cos(x)}{x}$ dont la représentation est donnée ci-dessous.



Graphiquement on observe que les valeurs $f(x)$ se rapprochent vers 2 pour x assez grand. On peut donc écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

Sur le même exemple, on observe que les valeurs $f(x)$ deviennent aussi grandes que voulu pour x suffisamment proche de 0 en valeurs positives. On peut donc écrire :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

2.2 Sur un tableur

L'analyse faite précédemment sur un graphe peut également être faite sur un tableur. Prenons l'exemple de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 0.7u_n + 1.8 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ci-dessous sont présentés les premiers termes de la suite (u_n) calculés via un tableur (peut également être fait sur calculatrice).

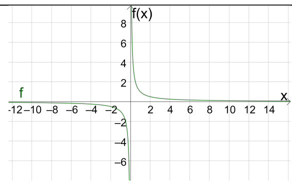
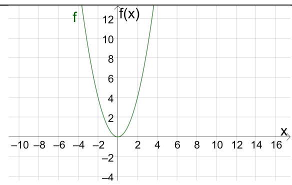
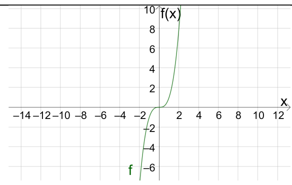
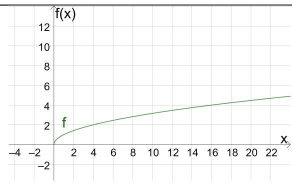
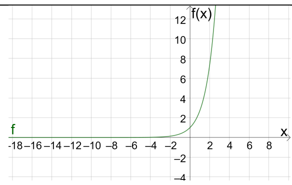
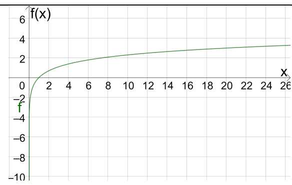
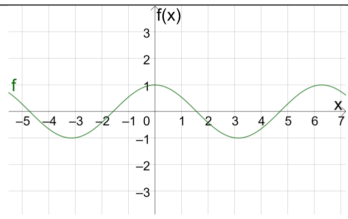
	A	B
1	n	u_n
2	0	-2
3	1	2
4	2	4
5	3	5
6	4	5.5
7	5	5.75
8	6	5.875
9	7	5.9375
10	8	5.9688
11	9	5.9844
12	10	5.9922
13	11	5.9961
14	12	5.998
15	13	5.999
16	14	5.9995
17	15	5.9998
18	16	5.9999
19	17	5.9999
20	18	6
21	19	6
22	20	6

Par lecture du tableur, on observe que les termes u_n se rapprochent aussi précisément que voulu vers 6 pour n assez grand. On peut donc écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$$

3 Limites usuelles et opérations usuelles

3.1 Limites usuelles

Fonction	Limites	Courbes représentatives
$x \to \frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to \pm 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	
$x \to x^n$ avec n pair	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$	
$x \to x^n$ avec n impair	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	
$x \to \sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	
$x \to e^x$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	
$x \to ln(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$	
$x \to cos(x)$ et $x \to sin(x)$	Pas de limites	

Remarque : Les résultats ci-dessus peuvent être démontrés en revenant aux définitions de limite vu en introduction. Cela ne sera pas fait dans ce document mais reste un exercice intéressant pour le lecteur.

3.2 Opérations usuelles sur les limites

Dans ce paragraphe on considérera deux fonctions f et g dont on connaît les limites en un point que l'on notera a. a peut valoir n'importe quelle valeur, y compris $\pm\infty$. Enfin on notera l et l' des nombres réels.

Limites d'une somme et d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$
$l\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Limites d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$
0	0	FI
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Limite d'une composition de fonction

On considère des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ et f continue en l. Alors :

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(l)$$

Remarque : Le terme "forme indéterminée" ne signifie pas qu'il n'existe pas de limite mais qu'on ne peut pas savoir immédiatement le résultat d'une éventuelle limite. Les formes indéterminées seront traitées dans la partie suivante.

3.3 Quelques exemples

Les connaissances sur les limites de fonctions de références et sur les opérations usuelles permettent de déterminer des éventuelles limites de fonctions complexes. Voyons quelques exemples.

— Soit la fonction $f : x \to x^2 - 4$. Quelle est la limite, si elle existe, de f en $+\infty$?

D'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} -4 = -4$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

— Soit la fonction $g : x \to \frac{3x+1}{(x-3)\times(x-1)}$. Quelle est la limite de g en 3^+ ?

Au numérateur, $\lim\limits_{x \to 3^+} 3x + 1 = 10$

Au dénominateur, $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) \times (x-1) = 0^+$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = +\infty$.

— Soit la fonction $h : x \to e^{-x^2}$. Quelle est la limite de h en $+\infty$?

D'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$, d'autre part la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

4 Formes indéterminées

Dans la partie précédente nous avons croisé des formes indéterminées. Pour lever ces indéterminées nous appliquerons, lorsque cela est possible, toujours la même méthode : **factoriser par le terme dominant.** Voyons cela sur deux exemples de formes indéterminées.

— Soit la fonction $f : x \to 5x - x^2$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
Nous sommes dans un cas de forme indéterminée, appliquons donc la méthode de factorisation par le terme dominant qui ici est $-x^2$.

$$\begin{aligned} 5x - x^2 &= -x^2 \times (\frac{5x}{-x^2} + 1) \\ &= \underbrace{-x^2}_{\text{facteur dominant}} \times \underbrace{(\frac{5}{-x} + 1)}_{\text{autre facteur qui tend vers 1}} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{-x} + 1 = 1$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

— Soit la fonction $g : x \to \frac{x^2-3x}{4x-7}$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
Nous sommes dans un cas de forme indéterminée, appliquons donc la méthode de factorisation par le terme dominant au numérateur et au dénominateur. **On reprendra le même code couleur pour les facteurs dominants et facteurs qui tendent vers 1.**

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x}{4x - 7} &= \frac{x^2 \times (1 + \frac{-3x}{x^2})}{4x \times (1 + \frac{-7}{4x})} \\ &= \frac{x^2 \times (1 + \frac{-3}{x})}{4x \times (1 + \frac{-7}{4x})} \\ &= \frac{x}{4} \times \frac{1 + \frac{-3}{x}}{1 + \frac{-7}{4x}} \end{aligned}$$

Conclusion : Le terme bleu tend vers 1, le terme rouge tend vers $+\infty$.
On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

5 Croissances comparées

Dans cette partie on s'intéresse à des formes indéterminées où il n'est pas possible d'appliquer le principe de factorisation par le terme dominant.

Il s'agit ici de connaître les résultats de cours sur les **croissances comparées**, autrement dit comparer entre eux les termes x, $ln(x)$ et e^x.

On donne les résultats suivants :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times e^x = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times ln(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

Ces résultats sont régulièrement demandés dans des QCM non justifiés. Il est également possible d'avoir des études de fonctions faisant intervenir ces résultats sur les croissances comparées. Prenons l'exemple suivant.

Soit $f \ : \ x \to \frac{ln(x^2)}{x}$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ln(x^2)}{x} \\ &= 2 \times \frac{ln(x)}{x} \quad \text{par propriété de } ln \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par résultat de croissances comparées.

6 Les méthodes avancées

Toutes les méthodes vues ci-dessus constituent une grande majorité des outils permettant de déterminer une limite. Les derniers outils qui seront présentés ci-dessous seront à utiliser quand les précédents n'ont pas donnés succès ou quand il est "visible" qu'il faut utiliser tel outil, cela est généralement le cas pour le théorème des Gendarmes et pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

6.1 Théorèmes de minoration / majoration et théorème des Gendarmes

Rappelons trois théorèmes dans le cadre des suites (fonctionne également pour les fonctions). Il s'agit de résultats qui l'on peut retrouver rapidement graphiquement.

Théorème de minoration : On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On a le résultat suivant : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème de majoration : On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

On a le résultat suivant : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des Gendarmes : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$. De plus on suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$.
On a le résultat suivant : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Prenons comme exemple la fonction $f\ :\ x \to \frac{sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Quelle est sa limite en $+\infty$?

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*,\ -1 \leq sin(x) \leq 1$, on en déduit pour $x > 0,\ \frac{-1}{x} \leq \frac{sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Conclusion : Par théorème des Gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

6.2 Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Considérons une suite définie par récurrence, par exemple : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 0.7u_n + 1.8 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Si une telle suite possède une limite finie l alors cette limite vérifiera la condition $f(l) = l$.

Cherchons donc à résoudre $f(l) = l$ dans notre cas :

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow l = 0.7l + 1.8 \\ &\Leftrightarrow 0.3l = 1.8 \\ &\Leftrightarrow l = \frac{1.8}{0.3} \\ &\Leftrightarrow l = 6 \end{aligned}$$

Conclusion : Faisons attention ! Nous ne venons pas de montrer que la limite de la suite (u_n) vaut 6. Nous venons de montrer que si limite finie il existe alors cette limite vaut 6.
Il est également possible que la limite soit $\pm\infty$ voire qu'il n'y ait pas de limite.

Néanmoins dans cet exemple il est possible de montrer que la suite (u_n) converge bien vers 6 en montrant par récurrence que la suite est croissante et majorée par 6. Il s'agit d'un exercice laissé au lecteur.

6.3 Via le nombre dérivé

En première une notion a été introduite en utilisant la limite. Il s'agit du nombre dérivé d'une fonction f en un point a que l'on note $f'(a)$.
On rappelle la définition $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque la limite existe et est finie.

Prenons l'exemple suivant. Soit la fonction $f \ : \ x \to \frac{cos(x)-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Quelle est la limite de f en 0 ?

$$\tfrac{cos(x)-1}{x} = \tfrac{cos(0+x)-cos(0)}{x}$$

En sachant que la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ en en déduit :

$$\lim_{x \to 0} \tfrac{cos(x)-1}{x} = cos'(0) = -sin(0) = 0$$

Remarque : Cette méthode nécessite de connaître ses dérivées usuelles.