Fiche de révisions Suites 1ère

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

Ce document est une fiche d'exercices de révisions pour les élèves de 1ère concernant le chapitre "Suites". Les exercices sont divisés en 3 catégories :

— **Les questions de cours :** Ces exercices permettent de vérifier si le cours est réellement appris et maîtrisé. Réussir ces exercices montre une connaissance parfaite du cours. Ces exercices sont à faire en priorité et permettront de faire très facilement les exercices d'applications.

— **Les exercices d'applications :** Il s'agit des exercices de base du chapitre. Il s'agit de la grande majorité des exercices qui vous sont proposés en classe et qui vous sont demandés en interrogation.
Ce document propose **un seul** exercice d'application par savoir-faire demandé. L'apprentissage étant lié à la **répétition** il est vivement conseillé de retravailler plusieurs fois ces exercices. Vos manuels scolaires sont une source prolifique de ce type d'exercices.

— **Les exercices pour aller plus loin :** Il s'agit d'exercices plus complexes qui, en plus d'une connaissance solide du cours, demande également de la réflexion et/ou de la technicité de calcul.

1 Généralités

1.1 Questions de cours

Exercice 1

1. Donner la définition d'une suite. Que permet de modéliser une suite ?
2. Donner quelques exemples variés de suites (formules, phrases en français, etc).
3. Comment représenter graphiquement une suite ? Donner un exemple.
4. Dans ce chapitre on rencontre régulièrement les écritures (u_n) et u_n. Sont-elles identiques ? Si non, expliquer les différences.

Exercice 2

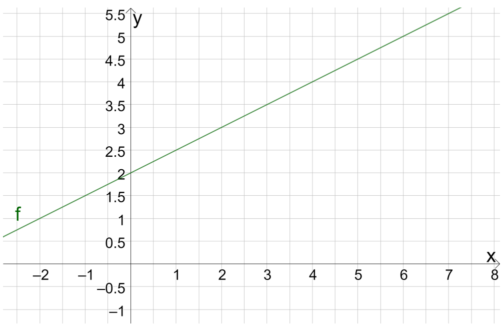
1. Quelles sont les deux manières de définir une suite ? On donnera le vocabulaire associé et on expliquera la différence fondamentale entre les deux manières de définir une suite.
2. Pour chacune des manières de définir une suite, donner un exemple de suite (des formules sont attendues).
3. Selon vous quelle est la manière la plus efficace de définir une suite ? Pourquoi l'autre manière est également utilisée ?

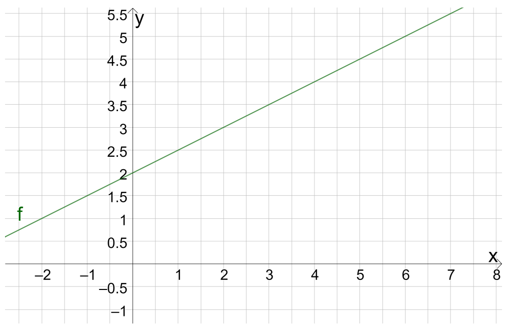
Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 0.5n + 2 \ ; \qquad \begin{cases} v_{n+1} = 0.5v_n + 2 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

1. Calculer à la main u_4 et v_4.
2. A l'aide de la calculatrice, donner les premiers termes des deux suites et donner u_{100} et v_{100}.
3. Représenter ci-dessous les 5 premiers termes de la suite (u_n) à gauche et de la suite (v_n) à droite.





1.2 Exercices d'application

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = n^5 - 4n$.

Calculer u_4 et u_{10}.

Exercice 5

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{n+2} = w_{n+1} + w_n & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ w_0 = 1 \\ w_1 = 1 \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes des suites (v_n) et (w_n).
2. A l'aide de la calculatrice, donner v_{100} et w_{100}.

Exercice 6

Un matin, un enfant décide de poser un récipient dans son jardin contenant 200g de noisettes.
Chaque après-midi un écureuil vient manger la moitié du récipient, puis l'enfant remet 80g de noisettes le soir.
On note u_n la quantité de noisettes en grammes dans le récipient le n-ième jour au matin.

1. Donner la valeur de u_1 et u_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 7

1. Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n$.
2. Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (v_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 1$.

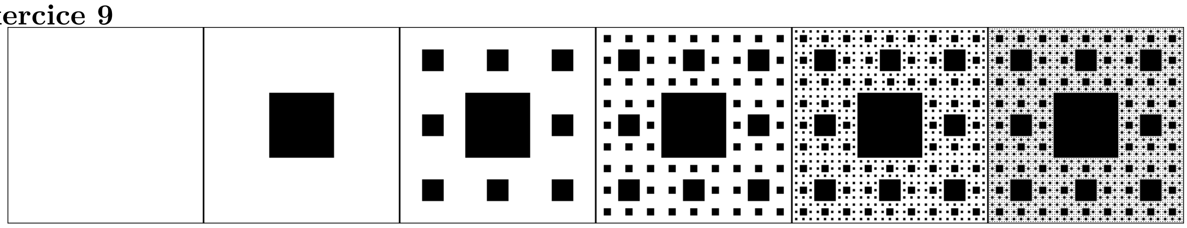
1.3 Pour aller plus loin

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite de polynômes (P_n) définies pour tout n entier naturel par $P_n(X) = X^2 - 2nX + n^2 - 1$. On note a_n la plus grande racine de P_n.

Donner une expression explicite de a_n ou à défaut une expression par récurrence.

Exercice 9



L'image ci-dessus représente les six premières étapes de la construction du tapis de Sierpinski. Pour construire ce tapis on procède de la manière suivante :

1. A l'étape 0, on considère un carré entièrement blanc de côté 1.
2. A l'étape 1, On divise le carré précédent en 9 et on colorie le centre en noir.
3. A l'étape n+1, On reprend le résultat de l'étape n, on divise tous les carrés blancs en 9 et on colorie les centres en noir.

On pose la suite (u_n) représentant l'aire noire totale à l'étape n. Donner une expression explicite de u_n ou à défaut une expression par récurrence.

2 Suites arithmétiques et géométrique

2.1 Questions de cours

Exercice 10

1. Donner la définition par récurrence d'une suite arithmétique.
2. Comment montrer mathématiquement qu'une suite est ou n'est pas arithmétique.

   Indication : On veillera à être précis et à séparer le cas ou l'on pense que la suite est arithmétique et le cas l'on pense que la suite n'est pas arithmétique.
3. Donner la définition par récurrence d'une suite géométrique.
4. Comment montrer mathématiquement qu'une suite est ou n'est pas géométrique.

   Indication : On veillera à être précis et à séparer le cas ou l'on pense que la suite est géométrique et le cas l'on pense que la suite n'est pas géométrique.

Exercice 11

1. Donner la définition explicite d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme connu u_0. Même question lorsque le premier terme connu est u_p avec $p \neq 0$.
2. Donner la définition explicite d'une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme connu v_0. Même question lorsque le premier terme connu est v_p avec $p \neq 0$.

2.2 Exercices d'application

Exercice 12

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 3$. Donner l'expression explicite de (u_n).

Exercice 13

On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = \frac{2}{3}$. Donner l'expression explicite de (v_n).

Exercice 14

On considère les trois suites $(a_n),\ (b_n),\ (c_n)$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} a_n = 2n+3 \\ b_n = \frac{n+1}{2n-3} \\ c_n = \frac{2^n}{5^{n+1}} \end{cases}$$

Pour chacune des trois suites, dire si celles-ci sont arithmétiques, géométriques, aucun des deux.

Exercice 15

Une personne avait 10 jeux-vidéo en janvier 2019. Depuis février 2019, elle décide d'acheter deux nouveaux jeux le premier jour de chaque mois.
On note u_n le nombre de jeux vidéo en fin de mois, n mois après janvier.

Justifier que (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

Exercice 16

Une ville comptait 10 000 habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 10% par rapport à l'année précédente.
On note u_n le nombre d'habitants en $2018 + n$.

1. Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme ainsi que sa raison.
2. Combien d'habitants y aura t-il en 2040 ?

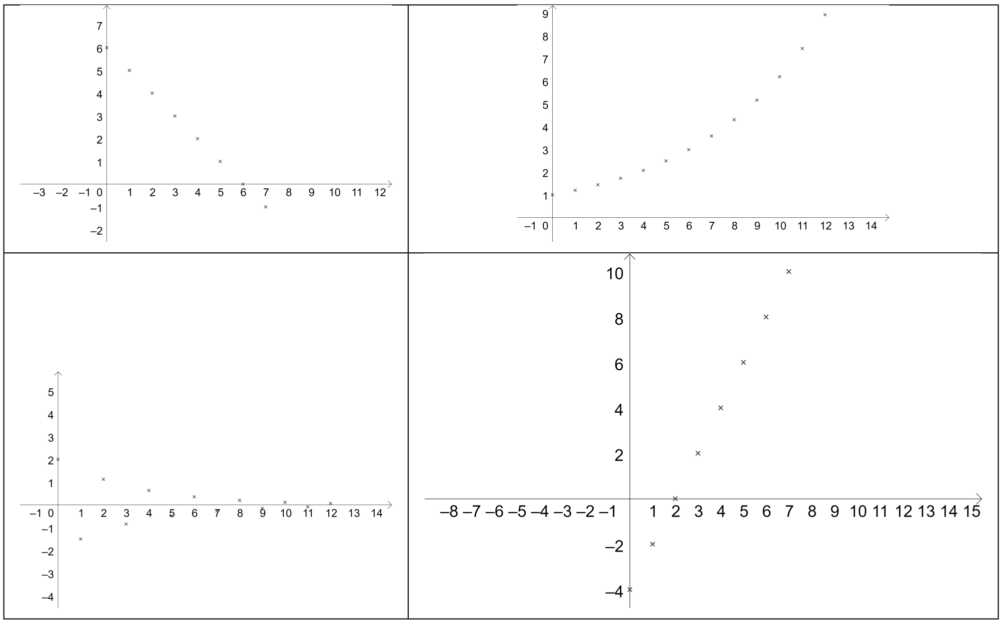
Exercice 17

On considère une suite (u_n) telle que $u_4 = 5$ et $u_{11} = 81920$.

1. En supposant que (u_n) est une suite arithmétique, déterminer la raison r et le premier terme u_0.
2. En supposant que (u_n) est une suite géométrique, déterminer la raison q et le premier terme u_0.

Exercice 18

Pour chacune des représentations graphiques ci-dessous, dire si elles correspondent à une suite arithmétique ou géométrique. Dans chaque cas, donner le premier terme, la raison et en déduire l'expression explicite de ces suites.



Exercice 19

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Pouvez-vous donner une expression explicite de la suite (u_n) ?
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont vous déterminerez le premier terme et la raison.
4. En déduire une formule explicite de u_n.

2.3 Pour aller plus loin

Exercice 20

Est-il possible qu'une suite soit à la fois arithmétique et géométrique ? Si oui quelles sont ces suites ? Sinon démontrer que cela est impossible.

---

3 Sommes de termes de suite

3.1 Questions de cours

Exercice 21

1. Compléter la formule suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 + 2 + ... + n =$$

2. En déduire le résultat de $1 + 2 + ... + 99 + 100$
3. Pour les élèves souhaitant poursuivre les mathématiques en études supérieures, essayer de démontrer la formule en première question.

   Indication : En posant $S = 1+2+...+n$, on pourra calculer $S+S$ en réarrangeant astucieusement les termes.

Exercice 22

1. Compléter la formule suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ 1 + q + q^2 + ... + q^n =$$

2. En déduire le résultat de $1 + 2 + 4 + ... + 33554432$
3. Pour les élèves souhaitant poursuivre les mathématiques en études supérieures, essayer de démontrer la formule en première question.

   Indication : On pourra calculer $(1 + q + q^2 + ... + q^n) \times (1 - q)$

Exercice 23

1. Pour (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Compléter la formule suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n =$$

2. En déduire le résultat de $u_0 + u_1 + ... + u_{49} + u_{50}$ quand la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -17$.
3. Pour les élèves souhaitant poursuivre les mathématiques en études supérieures, essayer de démontrer la formule en première question.

   Indication : On utilisera le résultat intermédiaire de l'exercice 20

Exercice 24

1. Pour (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Compléter la formule suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} + v_n =$$

2. En déduire ce que vaut $v_0 + v_1 + ... + v_{49} + v_{50}$ quand la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 3$.

3. Pour les élèves souhaitant poursuivre les mathématiques en études supérieures, essayer de démontrer la formule en première question.

   Indication : On utilisera le résultat intermédiaire de l'exercice 21

3.2 Exercices d'application

Exercice 25

1. Calculer $1 + 2 + ... + 15$.
2. Calculer $1 + 2 + ... + 100$.
3. En déduire le résultat de $16 + 17 + ... + 100$.

Exercice 26

1. Calculer $1 + 2 + ... + 15$.
2. Calculer $1 + 2 + ... + 100$.
3. En déduire le résultat de $16 + 17 + ... + 100$.

Exercice 27

Un passionné de cyclisme décide de partir de Paris et d'aller à Stockholm en vélo. Il doit parcourir 2 000km.
Le premier jour, il parcourt 20km. Chaque jour, il parcourt 5km de plus que le jour précédent.
On note u_n la distance parcourue le n-ième jour. On note s_n la distance total parcourue au total depuis le premier jour jusqu'à la fin du n-ième jour.

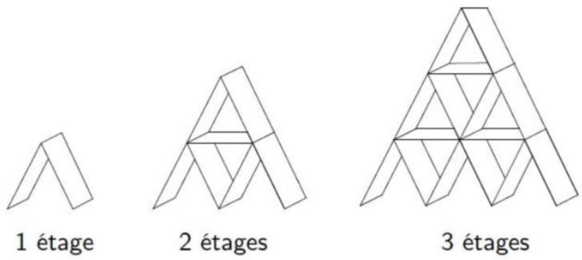
1. Quelle distance parcourt le cycliste le deuxième jour ?
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Donner les valeurs de s_1 et s_2.
4. Exprimer s_n en fonction de n.
5. Déterminer au bout de combien de jours le cycliste aura terminé son voyage.

Exercice 28

Proposer un énoncé (ou un problème) faisant intervenir les mêmes notions que l'exercice précédent mais faisant intervenir des suites géométriques.

3.3 Pour aller plus loin

Exercice 29



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'image ci-dessus montre des châteaux de cartes à respectivement 1, 2 et 3 étages. On note u_n le nombre de carte d'un château de cartes à n étages.

Donner une expression explicite de u_n

Exercice 30

1. Calculer la somme des nombres pairs inférieurs ou égaux à 100.
2. En déduire la somme des nombres impairs inférieurs ou égaux à 100.

4 Variations de suites

4.1 Questions de cours

Exercice 31

1. Écrire mathématiquement qu'une suite (u_n) est croissante.
2. Écrire mathématiquement qu'une suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Que signifie qu'une suite (u_n) est monotone ?

Exercice 32

1. Rappeler les deux méthodes principales pour étudier les variations d'une suite (Les résultats de cours sur les suites arithmétiques et géométriques ne sont pas attendus dans cet exercice). On s'intéressera notamment aux différences entre ces deux méthodes et quand l'une est préférable à l'autre.
2. Proposer deux exemples de suites dont l'étude des variations est propice via une méthode.

Exercice 33

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r. Compléter le tableau suivant en complétant par "décroissante", "croissante", "constante" ou "non monotone"

Valeurs de r	Variations de la suite
$r < 0$	
$r = 0$	
$r > 0$	

Exercice 34

On considère une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0. Compléter le tableau suivant en complétant par "décroissante", "croissante", "constante" ou "non monotone".

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$	$u_0 = 0$
$q > 1$			
$q = 1$			
$q \in]0;1[$			
$q = 0$			
$q < 0$			

4.2 Exercices d'application

Exercice 35

Étudier les variations des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $a_n = n^2 + 4n$

2. $b_n = n + \frac{1}{n}$
3. $c_n = \frac{1}{5n}$
4. $d_n = \frac{n}{n+1}$
5. $e_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \times (\frac{n}{e})^n}$ où $n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n$

Exercice 36

Étudier les variations des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $a_0 = -2$ et $a_{n+1} = a_n - n^2$
2. $b_n = (\frac{7}{9})^n$
3. (c_n) une suite arithmétique de premier terme $c_0 = -3$ et de raison $r = 0.1$
4. (d_n) une suite géométrique de premier terme $d_0 = -9$ et de raison $q = 0.5$
5. (e_n) une suite géométrique de premier terme $e_0 = -9$ et de raison $q = -0.5$

Exercice 37

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses et justifier.

1. Si une suite (u_n) est telle que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ alors la suite (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes alors $(u_n + v_n)$ est une suite croissante.
3. Si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors $(u_n + v_n)$ est une suite décroissante.
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ alors (u_n) est une suite croissante.
5. Si f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) est une suite décroissante alors la suite $(f(u_n))$ est décroissante.

4.3 Pour aller plus loin

Exercice 38

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite de polynômes (P_n) définies pour tout n entier naturel par $P_n(X) = X^2 - 8X + 16 - \frac{1}{n^2}$. On note respectivement a_n et b_n la plus petite et la plus grande racine de P_n.

1. Étudier les variations des suites (a_n) et (b_n).
2. Étudier les variations de la suite $(b_n - a_n)$.

---

5 Limites

5.1 Questions de cours

Exercice 39

1. Rappeler intuitivement le concept de limite d'une suite.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe toujours ? Si non, donner un exemple d'une telle suite.
3. Représenter graphiquement une suite (u_n) qui tend vers 1 et une suite (v_n) qui tend vers $-\infty$
4. En classe de Première, quels outils permettent de conjecturer la limite d'une suite ?

Exercice 40

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r de premier terme u_0. Compléter le tableau suivant par les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n. Vous mettrez une croix si vous pensez que la limite n'existe pas.

Valeurs de r	Variations de la suite
$r < 0$	
$r = 0$	
$r > 0$	

Exercice 41

On considère une suite (u_n) géométrique de raison q de premier terme u_0. Compléter le tableau suivant par les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n. Vous mettrez une croix si vous pensez que la limite n'existe pas.

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$	$u_0 = 0$
$q > 1$			
$q = 1$			
$q \in]-1;1[$			
$q \leq -1$			

5.2 Exercices d'application

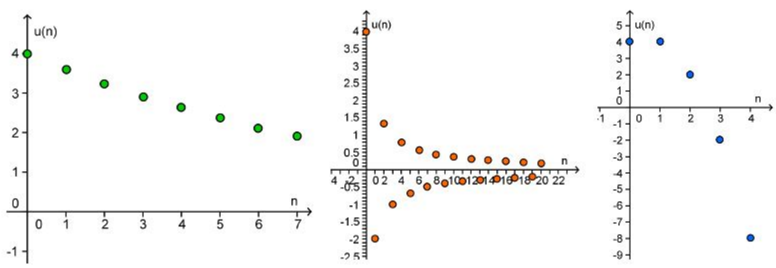
Exercice 42

Conjecturer à l'aide de la calculatrice les limites, si elles existent, des suites suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \frac{n-3}{2n+1}$
2. $v_n = \frac{1.01^n}{n^3}$

Exercice 43

Pour les trois représentations ci-dessous, donner une conjecture des limites des suites, si vous pensez qu'elles existent.



Exercice 44

Donner, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. (a_n) une suite arithmétique de premier terme $a_0 = -3$ et de raison $r = 1$
2. (b_n) une suite arithmétique de premier terme $b_0 = 3$ et de raison $r = -1$
3. (c_n) une suite géométrique de premier terme $c_0 = -9$ et de raison $q = -0.5$
4. (d_n) une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = 4.5$
5. (e_n) une suite géométrique de premier terme $e_0 = 10$ et de raison $q = -3$

5.3 Pour aller plus loin

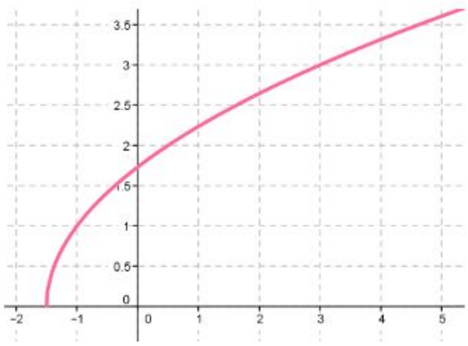
Exercice 45

Dire si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses en justifiant.

1. Toute suite converge vers une limite.
2. Si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2 alors $(u_n \times v_n)$ converge vers $l_1 \times l_2$.
3. Si une suite (u_n) est décroissante alors elle admet une limite.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite de réels.
   Si (u_n) converge vers l alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

Exercice 46

Ci-dessous est tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$



On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

Sans utiliser la calculatrice, donner une conjecture de la limite de cette suite.

---

6 Algorithmie

6.1 Questions de cours

Exercice 47

1. Rappeler la définition d'un algorithme. Quelle est la différence entre un algorithme et un programme ?
2. En langage Python, rappeler à quoi servent les termes suivants :
   def ; ***if*** ; ***while*** ; ***for***.
3. En langage Python, quelle est la différence entre $''='' $ et $''==''$?

Exercice 48

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n^2+1} \ ; \qquad \begin{cases} v_{n+1} = \sqrt{v_n^2+1} \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

Écrire deux programmes Python renvoyant le n-ième terme des suites (u_n) et (v_n).

6.2 Exercices d'application

Exercice 49

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n lancés d'une pièce équilibré. On note p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois "FACE" au cours de n lancés.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$
2. A l'aide d'un programme Python, déterminer le nombre minimal de lancers n nécessaire pour être sûr à 99% de chances d'obtenir au moins une fois "FACE".

6.3 Pour aller plus loin

Exercice 50

On considère un pays où la population est constante égale à 120 millions. Les habitants habitent soit à la campagne soit en ville. Les mouvements de population sont modélisés de la manière suivante :

— En 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins.

— Chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville.

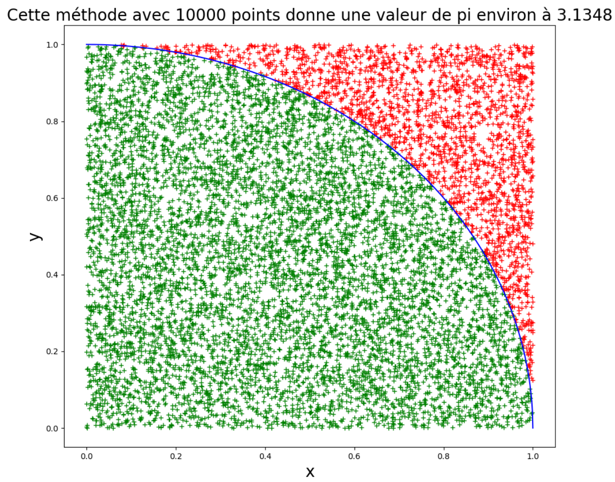
— Chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions et v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions.

Écrire un programme Python donnant la répartition de population en l'année 2050.

Exercice 51

La méthode de Monte Carlo est une technique probabiliste permettant entre autre de déterminer une approximation de π. L'objectif de cet exercice est d'obtenir le résultat suivant en Python.



Pour écrire ce programme Python, on se posera les questions suivantes, les réponses peuvent être trouvées sur votre moteur de recherche préféré.

1. Quel est le principe de la méthode de Monte Carlo ?
2. On utilisera la bibliothèque **random**, quelle est la commande qui permet de renvoyer un nombre réel entre 0 et 1 ?
3. Comment vérifier qu'un point (x, y) est compris dans le quart de disque unité ?
4. On utilisera la bibliothèque **matplotlib** pour la représentation graphique. Trouver un exemple sur Internet sur lequel vous inspirer.