Fiche de révisions Second degré 1ère

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

N'apprenez plus sans comprendre

Ce document est une fiche d'exercices de révisions pour les élèves de 1ère concernant le chapitre "Second degré". Les exercices sont divisés en 3 catégories :

— **Les questions de cours :** Ces exercices permettent de vérifier si le cours est réellement appris et maîtrisé. Réussir ces exercices montre une connaissance parfaite du cours. Ces exercices sont à faire en priorité et permettront de faire très facilement les exercices d'applications.

— **Les exercices d'applications :** Il s'agit des exercices de base du chapitre. Il s'agit de la grande majorité des exercices qui vous sont proposés en classe et qui vous sont demandés en interrogation.
Ce document propose **un seul** exercice d'application par savoir-faire demandé. L'apprentissage étant lié à la **répétition** il est vivement conseillé de retravailler plusieurs fois ces exercices. Vos manuels scolaires sont une source prolifique de ce type d'exercices.

— **Les exercices pour aller plus loin :** Il s'agit d'exercices plus complexes qui, en plus d'une connaissance solide du cours, demande également de la réflexion et/ou de la technicité de calcul.

1 Rappels de Seconde et premiers éléments

1.1 Questions de cours

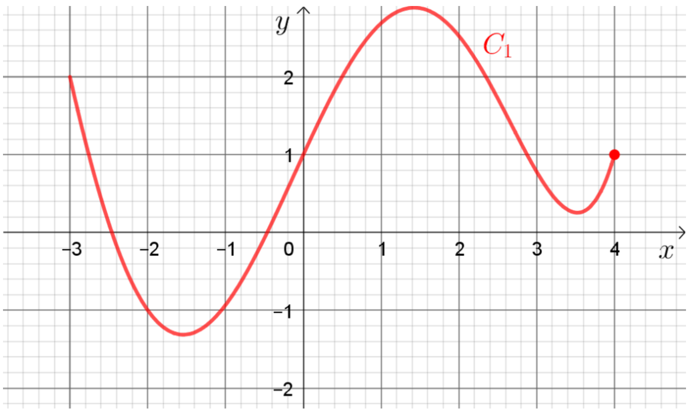
Exercice 1

Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	-3			2,25	$\sqrt{3}$			
x^2													2,25	$\frac{9}{4}$			5	$\sqrt{2}$	-1

Exercice 2

1. Rappelez les définitions de **fonction, image, antécédent**. Vous accompagnerez ces définitions d'une représentation graphique.
2. On considère la courbe représentative suivante :



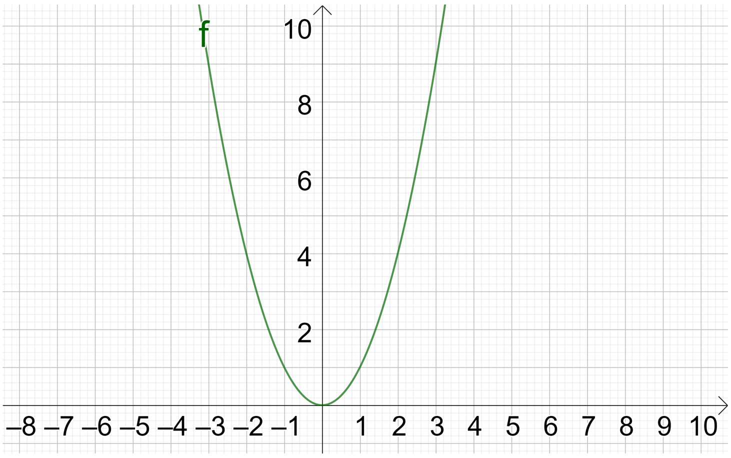
   (a) Déterminer $f(2)$.

   (b) Résoudre $f(x) = 2$.

3. On considère la fonction $h \ : \ x \to 3x^2 - 5x + 2$.

   Calculer $h(0)$, $h(3)$ et $h(-1)$.

Exercice 3 La courbe représentative de la fonction carré est donnée ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 9$.
2. On cherche à résoudre $x^2 = k$ où k est un réel.
   (a) Donner les solutions dans le cas où $k > 0$.
   (b) Donner les solutions dans le cas où $k = 0$.
   (c) Donner les solutions dans le cas où $k < 0$.

   Indication : On pourra toujours s'aider de la représentation graphique.

Exercice 4

On considère trois réels $a,\ b,\ c$ et $a \neq 0$. On pose la fonction $f\ :\ x \to ax^2 + bx + c$.

1. Parmi $a,\ b,\ c,\ x$; qui sont les variables et qui sont les paramètres ?
2. Un utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel que GéoGebra, faite varier indépendamment a puis c puis b (dans cet ordre) et expliquer le plus précisément possible l'impact graphique de a, c et b.

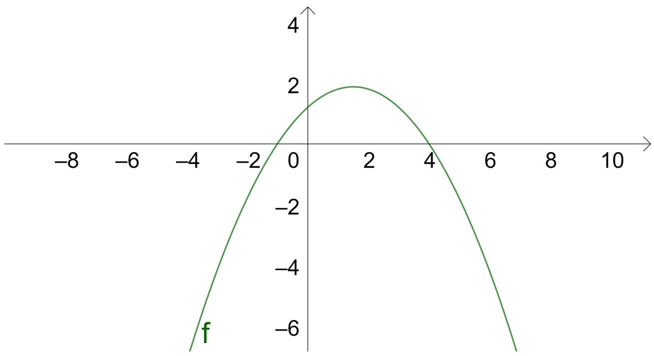
Exercice 5

1. Donner la définition d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. De même pour une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les variations de la fonction carré.

1.2 Exercices d'application

Exercice 6

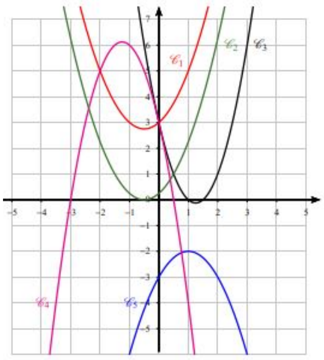
On considère la courbe représentative d'un polynôme de second degré $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont inconnues.



A l'aide du graphe ci-dessus, déterminer, si cela est possible, les signes de a, b et c.

Exercice 7

On considère ci-dessous les représentations graphiques de cinq polynômes du second degré.



Associer à chaque courbe le polynôme correspondant.

— $-x^2 + 2x - 3$

— $x^2 + x + 3$

— $2x^2 - 5x + 3$

— $-2x^2 - 5x + 3$

— $x^2 + x + 0.25$

1.3 Pour aller plus loin

Exercice 8

On considère trois réels $a,\ b,\ c$ et $a \neq 0$. On pose la fonction $f\ :\ x \to ax^2 + bx + c$.

Déterminer les valeurs de a, b et c telles que $f(-1) = 5$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 3$.

2 Forme canonique

2.1 Questions de cours

Exercice 9

1. Donner la forme générale d'une forme canonique d'un polynôme du second degré.
2. Quelles informations supplémentaires sont données par la forme canonique ?

Exercice 10
On considère les fonctions $f\ :\ x \to x^2 - 2x - 7$ et $g\ :\ x \to \frac{-3}{5}x^2 + x - \frac{7}{4}$.

Donner les formes canoniques de f et g.

Exercice 11
On reprend la même fonction qu'à l'exercice précédent $f\ :\ x \to x^2 - 2x - 7$.

Donner toutes les informations possibles sur f.

2.2 Exercices d'application

Exercice 12
Donner les formes canoniques des polynômes suivants.

— $x^2 + 3$
— $x^2 + x + 3$
— $4x^2 - x - 7$
— $-5x^2 + \frac{4}{5}x$
— $-\sqrt{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

Exercice 13

Donner le minimum (ou le maximum) des polynômes suivants.

- $x^2 + 3$
- $x^2 + x + 3$
- $4x^2 - x - 7$
- $-5x^2 + \frac{4}{5}x$
- $-\sqrt{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

Exercice 14

Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour.
Le coût de fabrication de n balançoires, en euros, est donné par la suite $(u_n)_n = (n^2 + 230n + 325)_n$.
Chaque balançoire est vendue 300€ et toutes les balançoire sont vendues.

Déterminer le nombre de balançoire à produire par jour pour avoir un bénéfice optimal.

Exercice 15

Donner le tableau de variations des polynômes suivants.

- $(x - 4)^2 + 7$
- $3x^2 - 5x + 1$
- $(x - 4)(x + 2)$
- $-x^2 + 4x - 4$

2.3 Pour aller plus loin

Exercice 16

On considère trois réels $a,\ b,\ c$ et $a \neq 0$. On pose la fonction $f\ :\ x \to ax^2 + bx + c$. L'objectif de cet exercice est de redémontrer toutes les propriétés du chapitre.

1. Donner la forme canonique de f. En déduire la valeur du minimum ou du maximum de f.

   Indication : On factorisera par a au préalable. Pour la deuxième partie de question on s'intéressera au signe de a.
2. On note C_f la courbe représentative de f. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de C_f.

   Indication : La droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de C_f si pour tout réel h, $f(\frac{-b}{2a} + h) = f(\frac{-b}{2a} - h)$.

3. On note $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$. Réécrire la forme canonique de f à l'aide de Δ.

4. A l'aide de la question précédente, résoudre $f(x) = 0$.

   Indication : On traitera séparément les cas suivants : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

---

3 Discriminant et racines

3.1 Questions de cours

Exercice 17

On considère trois réels $a,\ b,\ c$ et $a \neq 0$. On pose la fonction $f\ :\ x \to ax^2 + bx + c$.

1. Donner la définition du discriminant de f. Quel est l'intérêt du discriminant ?
2. Rappelez la définition d'une racine de f. Une racine existe-elle toujours ?
3. Donner toutes les méthodes pour déterminer une racine d'un polynôme du second degré. Pour chaque méthode on se posera les questions suivantes : La méthode peut-elle être appliquée à tout polynôme ? La méthode est-elle simple ?

Exercice 18

Écrire un programme Python et/ou sur votre calculatrice prenant en argument trois réels $a,\ b,\ c$ et qui renvoie le(s) racine(s) du polynôme $ax^2 + bx + c$. Si le polynôme n'admet pas de racine le programme l'affichera.

Exercice 19

On considère le polynôme $\mathrm{P} = x^2 - x - 6$. Trouver les racines évidentes de P.

Exercice 20

On suppose qu'un polynôme P admet deux racines x_1 et x_2.

1. Donner une forme factorisée de P.

2. Application : On considère le polynôme $x^2 - 6x + 8$.
   (a) Montrer que 2 est racine de P.
   (b) En déduire la deuxième racine de P.

3.2 Exercices d'application

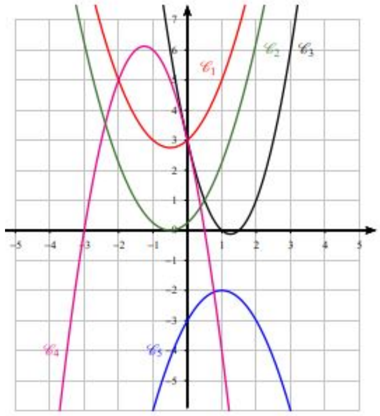
Exercice 21

Calculer les discriminants des polynômes suivants.

— $x^2 + x + 1$
— $-3x^2 + 2x - 5$
— $x^2 - \sqrt{2}x + 4$
— $-(x-2)^2 - 1$
— $\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$

Exercice 22

Sans calculs, déterminer le signe du discriminant des polynômes représentés ci-dessous.



Exercice 23

Déterminer les racines des polynômes suivants.

— $x^2 - 7x + 6$

— $x^2 + 4$

— $2x^2 + \sqrt{5}x - 15$

— $(x+2)(x-6)$

— $(x-2)^2 - \frac{4}{9}$

Exercice 24

Résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} x \times y = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Exercice 25

Donner le tableau de signe des expressions suivantes.

— $\frac{x^2+3x+1}{x+1}$

— $\frac{3x}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{11}{5}$

Exercice 26

Résoudre les inéquations suivantes.

— $x^2 - x + 1 < 0$

— $-2x^2 - x + 4 > 0$

— $-(x-1)^2 - 1 < 0$

— $x(x-2) < 0$

— $x^2 - 8x + 14 > -1$

— $\frac{3x^2+10x+8}{x+2} - 2x + 5 \geq 0$

Exercice 27

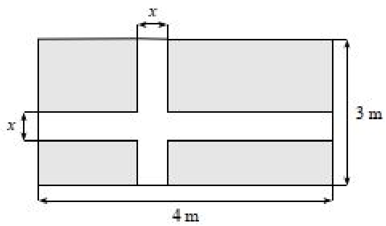
Pour chaque question, déterminer au moins un polynôme qui vérifie les conditions.

— Le polynôme admet 2 et 4 comme racines.

— Le polynôme est croissant sur $]-\infty; -1]$ puis décroissant et $f(2) = 5$.

— Le polynôme admet 5 comme minimum et un axe de symétrie en $x = 2$.

Exercice 28



Déterminer la valeur de x pour que l'aire blanche soit égale à l'aire grise.

Exercice 29

Une entreprise produit un matériau révolutionnaire. Elle peut en produire jusqu'à 50kg par jour.
Le coût de fabrication de x kilos de matériau est déterminer par la fonction $f(x) = -0.23x^2 + 46x - 300$. Enfin on suppose que toute la marchandise est vendue.

1. Pour quelles valeurs de x l'entreprise fait-elle du bénéfice ?
2. Quelle est la valeur du bénéfice maximal possible de l'entreprise ?

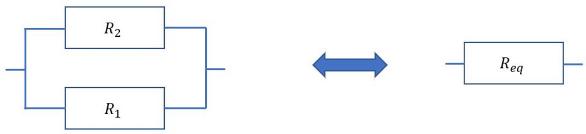
Exercice 30

On rappelle ci-dessous les règles d'associations de résistances en électronique.

Résistances en séries

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

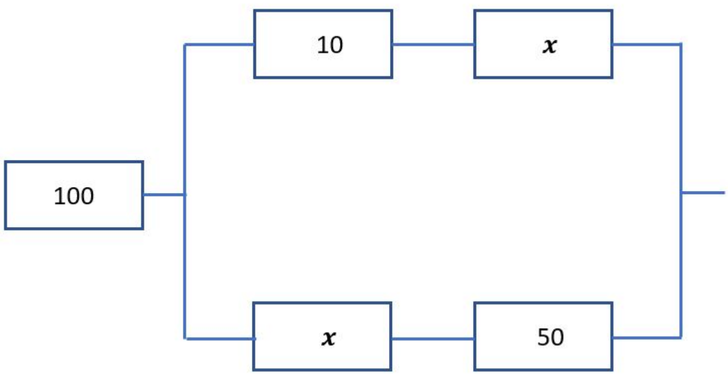
Résistances en parallèles



$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Autrement dit : $\boxed{R_{eq} = \dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}}$

Déterminer la valeur de x pour que le schéma ci-dessous soit équivalent à une résistance de 75Ω.



3.3 Pour aller plus loin

Exercice 31

Trouver les racines du polynôme $x^4 - x^2 - 2$.

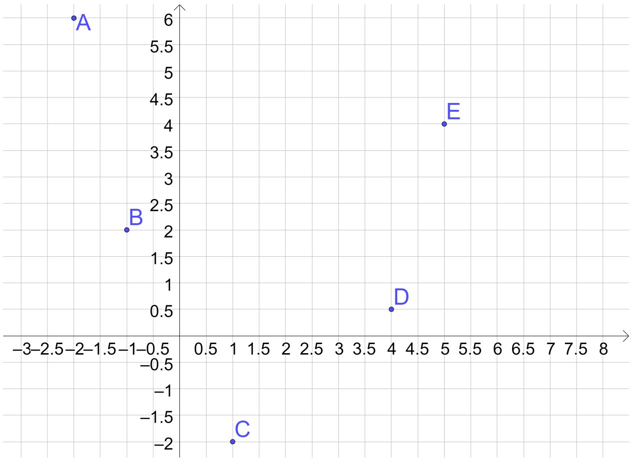
Exercice 32

Résoudre l'équation $4e^{2x} + 20e^x - 4 = 20$.

Exercice 33

Dans cet exercice on considérera des polynômes de degrés strictement supérieurs à 2.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points suivants
$A\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}4\\0.5\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.



L'objectif final de l'exercice est de trouver un polynôme L qui passe par les points $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$.

1. Justifier que le polynôme $L_A(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-4)(x-5)}{(-2+1)(-2-1)(-2-4)(-2-5)}$ vérifie les conditions suivantes.
$$\begin{cases} L_A(-2) = 1 \\ L_A(-1) = 0 \\ L_A(1) = 0 \\ L_A(3) = 0 \\ L_A(4) = 0 \\ L_A(5) = 0 \end{cases}$$
2. En vous inspirant du polynôme $L_A(x)$, déterminer un polynôme $L_B(x)$ qui vérifie les conditions suivantes.
$$\begin{cases} L_B(-2) = 0 \\ L_B(-1) = 1 \\ L_B(1) = 0 \\ L_B(3) = 0 \\ L_B(4) = 0 \\ L_B(5) = 0 \end{cases}$$
3. En déduire un polynôme $L(x)$ qui passe par les points $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$.

4. Ci-dessous est représenté le polynôme L (que l'on appelle polynôme interpolateur de Lagrange) à deux niveaux de zoom différents. Que pensez-vous de ces résultats ?