Fiche de révisions Produit Scalaire 1ère

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

Ce document est une fiche d'exercices de révisions pour les élèves de 1ère concernant le chapitre "Produit Scalaire". Les exercices sont divisés en 3 catégories :

— **Les questions de cours :** Ces exercices permettent de vérifier si le cours est réellement appris et maîtrisé. Réussir ces exercices montre une connaissance parfaite du cours. Ces exercices sont à faire en priorité et permettront de faire très facilement les exercices d'applications.

— **Les exercices d'applications :** Il s'agit des exercices de base du chapitre. Il s'agit de la grande majorité des exercices qui vous sont proposés en classe et qui vous sont demandés en interrogation.
Ce document propose **un seul** exercice d'application par savoir-faire demandé. L'apprentissage étant lié à la **répétition** il est vivement conseillé de retravailler plusieurs fois ces exercices. Vos manuels scolaires sont une source prolifique de ce type d'exercices.

— **Les exercices pour aller plus loin :** Il s'agit d'exercices plus complexes qui, en plus d'une connaissance solide du cours, demande également de la réflexion et/ou de la technicité de calcul.

1 Définitions et méthodes de calculs

1.1 Questions de cours

Exercice 1

En vous inspirant de l'exemple suivant concernant le produit réel classique.

$$\underbrace{2}_{\text{réel}} \times \underbrace{3}_{\text{réel}} = \underbrace{6}_{\text{réel}}$$

1. Donner la nature des objets dans un produit scalaire.
2. Dans une copie d'élève, on retrouve le résultat suivant $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{w}$, qu'en pensez-vous ?

Exercice 2

Donner les trois formules classiques permettant de calculer un produit scalaire. Dans quels cas l'une des trois est-elle plus avantageuse ?

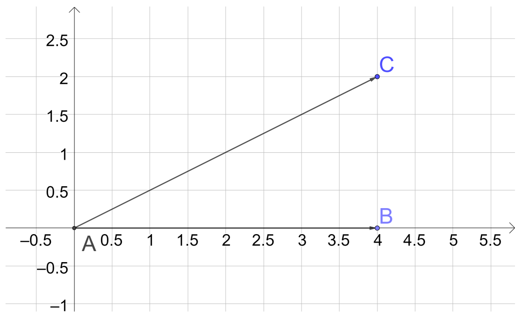
Exercice 3

On considère la formule suivante $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos((\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))$.

Dans quels cas cette formule devient-elle beaucoup plus simple ou autrement dit quand $cos((\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))$ est-il égal à -1, 0 ou 1 ? Que cela signifie sur la représentation graphique de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

Exercice 4

1. Rappeler la relation de Chasles pour des vecteurs.
2. Peut-on faire de la distributivité avec le produit scalaire ?
3. En déduire facilement à l'aide des exercices 3 et 4 le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans l'exemple ci-dessous.



1.2 Exercices d'application

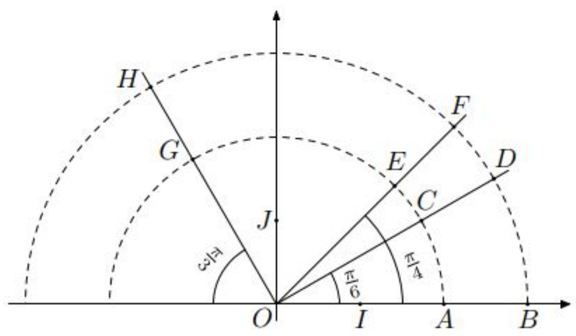
Exercice 5

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points suivants $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0.5\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}4.5\\1\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 6

On considère la figure ci-dessous où (O, I, J) est un repère orthonormé.



On a $OA = 2$ et $OB = 3$.

Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$; $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GH}$.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points suivants $A\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

En calculant un certain produit scalaire de deux manières différentes, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

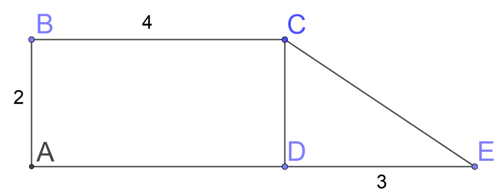
Exercice 8

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5cm$ et $AD = 10cm$. On note O le centre du rectangle $ABCD$.

Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}$.

Indication : Faire un schéma de la situation.

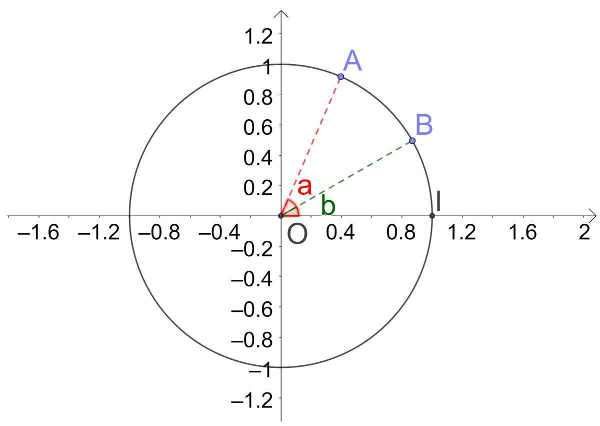
Exercice 9 On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un rectangle.



Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EB}$.

1.3 Pour aller plus loin

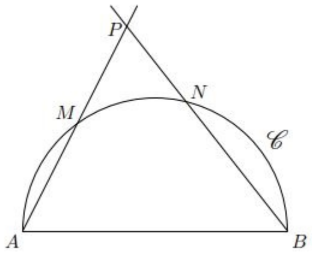
Exercice 10



1. En calculant $\vec{OA}.\vec{OB}$ de deux manières différentes, montrer que $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$.
2. En déduire les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice 11

On considère un demi-cercle C de diamètre $[AB]$. On place deux points distincts M et N sur ce demi-cercle et on note P l'intersection des droites (AM) et (BN).



Montrer que $AB^2 = AP \times AM + PB \times NB$.

---

2 Orthogonalité

2.1 Questions de cours

Exercice 12

Quelle(s) méthode(s) connaissez-vous pour vérifier l'orthogonalité de deux objets géométriques ? Laquelle est la plus efficace et pourquoi ?

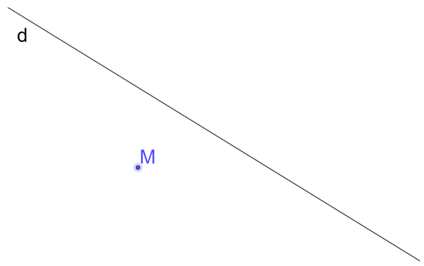
Exercice 13

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points suivants $A\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

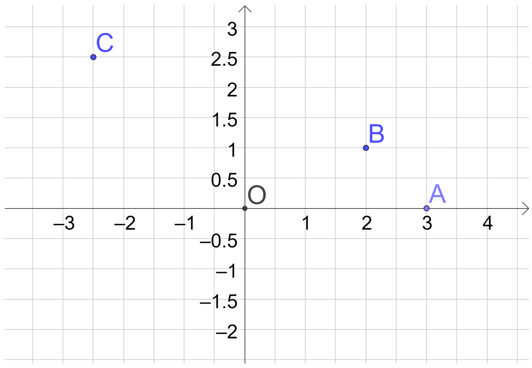
Exercice 14

1. On considère la figure suivante



   Construire le projeté orthogonal de M sur la droite (d).

2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, sans utiliser la formule via les coordonnées des vecteurs.



2.2 Exercices d'application

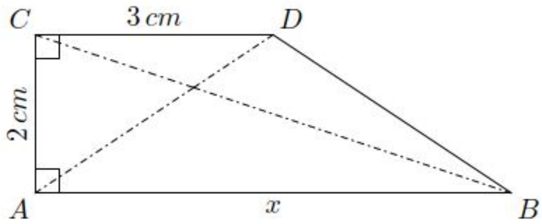
Exercice 15

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points suivants $A\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1.5\\2.5\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}7.5\\0\end{pmatrix}$.

Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 16

On considère un trapèze $ABCD$ tel que $AC = 2cm$ et $CD = 3cm$. On note $x = AB$.

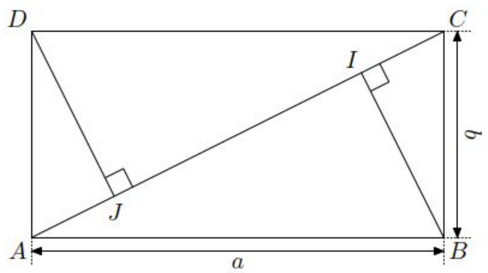


Que doit valoir x pour que les diagonales du trapèze $ABCD$ soient perpendiculaires ?

2.3 Pour aller plus loin

Exercice 17

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = a$ et $AD = b$. On note I le projeté orthogonal de D sur (AC) et I le projeté orthogonal de B sur (AC).



Déterminer la longueur IJ en fonction de a et de b.

---

3 Formules et relations

3.1 Questions de cours

Exercice 18

1. Dans un triangle ABC quelconque, donner une formule d'Al-Kashi.
2. Pour les élèves souhaitant poursuivre des études supérieures en Mathématiques, essayer de démontrer cette formule.

   Indication : On pourra calculer un produit scalaire de deux manières différentes.

Exercice 19

On rappelle la notation suivante $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$.
Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a l'égalité
$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 4\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Exercice 20

Cet exercice est "normalement" un résultat de cours qui est parfois mis de côté. L'objectif est de déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$ avec A, B des points du plan fixes et k un réel.

Remarque : Dans la littérature on trouvera aussi le problème de résoudre $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ qui revient au même que de résoudre $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$.

1. On note I le milieu du segment $[AB]$.
   Montrer que $(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}) = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$.
2. A l'aide de la question précédente, transformer l'équation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$.
3. En déduire l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$.
   Remarque importante : On sera amené à traiter trois cas différents.
4. Sachant que la longueur du segment $[AB]$ vaut 10. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 10$.

3.2 Exercices d'application

Exercice 21

Dans un triangle ABC tel que $AB = 4,7cm$, $AC = 6,1cm$ et $\widehat{BAC} = 35°$. Déterminer la longueur BC au millimètre près.

Exercice 22

Dans un triangle ABC tel que $AB = 5,6cm$, $AC = 5,2cm$ et $BC = 7cm$. Déterminer toutes les mesures d'angles au dixième de degré près.

Exercice 23

On considère un segment $[AB]$ de 5cm.

On rappelle la relation suivante $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :

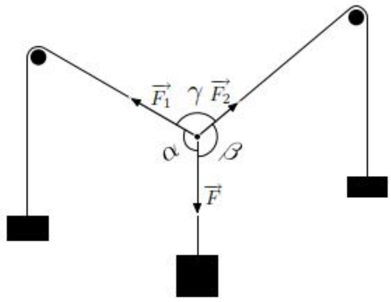
1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 5$
2. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
3. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9$
4. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -25$
5. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -30$

3.3 Pour aller plus loin

Exercice 24

On considère le système mécanique représenté ci-dessous où $\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| = 8N$, $\left\|\overrightarrow{F_2}\right\| = 6N$, $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = 12N$.

On note $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F}$ la résultante des forces.



1. Exprimer en fonction de α, β, γ les produits scalaires suivants $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{F}$.

   On souhaite que le système soit à l'équilibre, autrement dit que $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$. Dans les questions suivantes on supposera que **le système est à l'équilibre**.
2. Montrer que l'on cherche à résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{lllr} 4cos(\alpha) & +3cos(\beta) & + & +6=0 \\ 6cos(\alpha) & + & +3cos(\gamma) & +4=0 \\ & +6cos(\beta) & +4cos(\gamma) & +3=0 \end{array}\right.$$
3. Résoudre le système ci-dessous.

   Indication : Pour simplifier l'écriture du système on pourra écrire $x = cos(\alpha)$, $y = cos(\beta)$ et $z = cos(\gamma)$.
4. Représenter en vraie grandeur le système lorsqu'il est à l'équilibre.
   On prendra $1N = 1cm$.

4 Équations de droites et de cercles

4.1 Questions de cours

Exercice 25

On considère une droite (d). Rappeler la définition d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (d) et d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de (d).

Exercice 26

On considère une droite (d) et un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de (d).

1. Rappeler quelle est la forme d'une équation cartésienne de (d).
2. Pour les élèves souhaitant démontrer et/ou comprendre ce résultat. En considérant un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ appartenant à la droite (d) et un point $M\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$ quelconque appartenant à la droite (d).
   (a) Que vaut $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$?
   (b) En déduire l'équation cartésienne de la droite (d).

Exercice 27

On considère la droite (d) d'équation cartésienne $2x + 5y - 4 = 0$.

Les points $A\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Exercice 28

Résoudre le système d'équation suivant

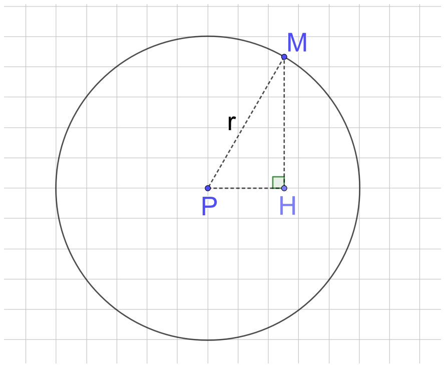
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}$$

Pourquoi est-il nécessaire de savoir résoudre un système d'équations dans ce chapitre ?

Exercice 29

1. Rappeler la définition d'un cercle de centre P et de rayon r.
2. Rappeler l'équation cartésienne d'un cercle de centre $P\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ et de rayon r.

   Indication : On pourra s'aider de la représentation graphique suivante où $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est un point quelconque appartenant au cercle.*



3. Quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $P\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.

Exercice 30

1. Donner les trois identités remarquables.
2. Compléter l'égalité suivante en utilisant une identité remarquable.

$$x^2 - 8x = (... \pm ...)^2 \pm ...$$

Exercice 31

On considère un cercle C de diamètre $[AB]$ et un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sur C.

1. Que peut-on dire du triangle MAB ?
2. En déduire une équation du cercle C à l'aide d'un produit scalaire.
3. A l'aide de l'exercice précédent, transformer l'équation (en la mettant sous la même forme que l'exercice ...).
4. A l'aide des questions précédentes, déterminer l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.2 Exercices d'application

Exercice 32

On considère les droites (d_1) d'équation $2x+3y=4$, (d_2) d'équation $x=\frac{-3}{2}$ et (d_3) d'équation $y=4x-2$.

Donner un vecteur normal pour chacune de ces trois droites.

Exercice 33

On considère un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\ \frac{5}{7}\end{pmatrix}$ et un point $A\begin{pmatrix}3\\1.2\end{pmatrix}$.

Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ passant par A.

Exercice 34

On considère la droite (d) équation cartésienne $3x+y-4=0$ et le point $B\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

1. Donner un vecteur normal de (d).
2. Donner une équation de la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par B.
3. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal de B sur (d).

Exercice 35 Donner l'équation cartésienne du cercle de centre $P\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ et de rayon 4.

Exercice 36 On considère le cercle C d'équation cartésienne $(x+\frac{4}{5})^2+(y-\sqrt{3})^2=6$.

Donner le rayon et les coordonnées du centre du cercle C.

Exercice 37 On considère l'équation $x^2+5x+y^2-5y-2=0$.
Ecrire cette équation sous la forme $(x\pm ...)^2+(y\pm ...)^2=....$

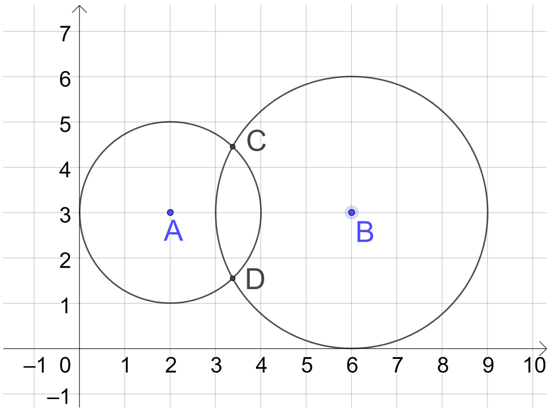
S'agit-il d'une équation de cercle ? Si oui donner les caractéristiques de ce cercle.

4.3 Pour aller plus loin

Exercice 38

On considère les points suivants $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$.

On trace le cercle de centre A et de rayon 2 puis on trace le cercle de centre B et de rayon 3.



Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersections des deux cercles.