Fiche méthodologique : Étude de fonction

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

1 Introduction

L'objectif de ce document est de rappeler les étapes clés d'une étude de fonction. Pour cela, nous considérons la fonction $f\ :\ x \to \frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$. Cherchons à l'étudier.

2 Étude du domaine de définition

Pour rappel le domaine de définition d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles il est possible d'écrire $f(x)$. En mathématiques il existe des opérations interdites, déterminer l'ensemble de définition d'une fonction consiste à déterminer l'ensemble des valeurs x qui n'entraîne pas les opérations interdites ci-dessous :

1. Diviser par 0
2. $\sqrt{x}$ avec $x < 0$
3. $ln(x)$ avec $x \leq 0$
4. etc.

Reprenons notre exemple $f\ :\ x \to \frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$. Il ne faut pas diviser par zéro. Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels privé des valeurs de x telles que : $x^2 - 2x - 3 = 0$. Il s'agit ici de trouer les **racines** d'un polynôme du second degré.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre cette équation. Prenons la méthode "classique" apprise en 1ère, calculer les racines à l'aide du discriminant. Avant toute chose, quelques rappels sur la méthode.

Considérons un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. On définit le **discriminant**, noté Δ, par $\Delta = b^2 - 4ac$. Ce discriminant est un test pour savoir combien de racines possède le polynôme $ax^2 + bx + c$.

1. Si $\Delta < 0$ alors le polynôme ne possède pas de racines.
2. Si $\Delta = 0$ alors le polynôme possède une racine unique $x_1 = \frac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta > 0$ alors le polynôme possède deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Reprenons notre exemple, on cherche les racines du polynôme $x^2 - 2x - 3$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.

Donc $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2} = 3$

Conclusion : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

3 Justification de dérivabilité

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

4 Calcul de la dérivée

La fonction f est un quotient, on rappelle le résultat suivant :
Pour une fonction f s'écrivant : $f \ : \ x \to \frac{u(x)}{v(x)}$, la fonction dérivée f' s'écrit : $f' \ : \ x \to \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Dans notre exemple $f \ : \ x \to \frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$, en reprenant les notations précédentes, on peut écrire :

— $u(x) = -x^2 + 2x + 11$
— $u'(x) = -2x + 2$
— $v(x) = x^2 - 2x - 3$
— $v'(x) = 2x - 2$

Finalement :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(-2x+2) \times (x^2 - 2x - 3) - (-x^2 + 2x + 11) \times (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\
&= \frac{-2x^3 + 4x^2 + 6x + 2x^2 - 4x - 6 - (-2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x + 22x - 22)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\
&= \frac{-2x^3 + 4x^2 + 6x + 2x^2 - 4x - 6 + 2x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 4x - 22x + 22)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\
&= \frac{0x^3 + 0x^2 - 16x - 16}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\
&= \frac{16 \times (1 - x)}{(x^2 - 2x - 3)^2}
\end{aligned}
$$

5 Étude du signe de la dérivée et tableau de variation

La dérivée ci-dessus a été calculée et mise sous une forme où il est facile d'étudier son signe. On rappelle les résultats suivants :

1. Si la dérivée f' est négative sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.
2. Si la dérivée f' est nulle sur un intervalle I alors la fonction f est constante sur I.
3. Si la dérivée f' est positive sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.

Dans notre exemple, trouver le signe des termes $1 - x$ et $(x^2 - 2x - 3)^2$ en fonction de x est simple. Une étude détaillée n'est donc pas faite ici, les résultats sont donnés directement dans le tableau de signe et de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x^2-2x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

6 Calculs des limites et extrema

— $f(1) = \frac{-1^2+2\times1+11}{1^2-2\times1-3} = -3$

— Pour $x \neq 0$, $\frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3} = \frac{x^2\times(-1+\frac{2}{x}+\frac{11}{x^2})}{x^2\times(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})} = \frac{-1+\frac{2}{x}+\frac{11}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$. Le résultat est le même pour x tendant vers $+\infty$

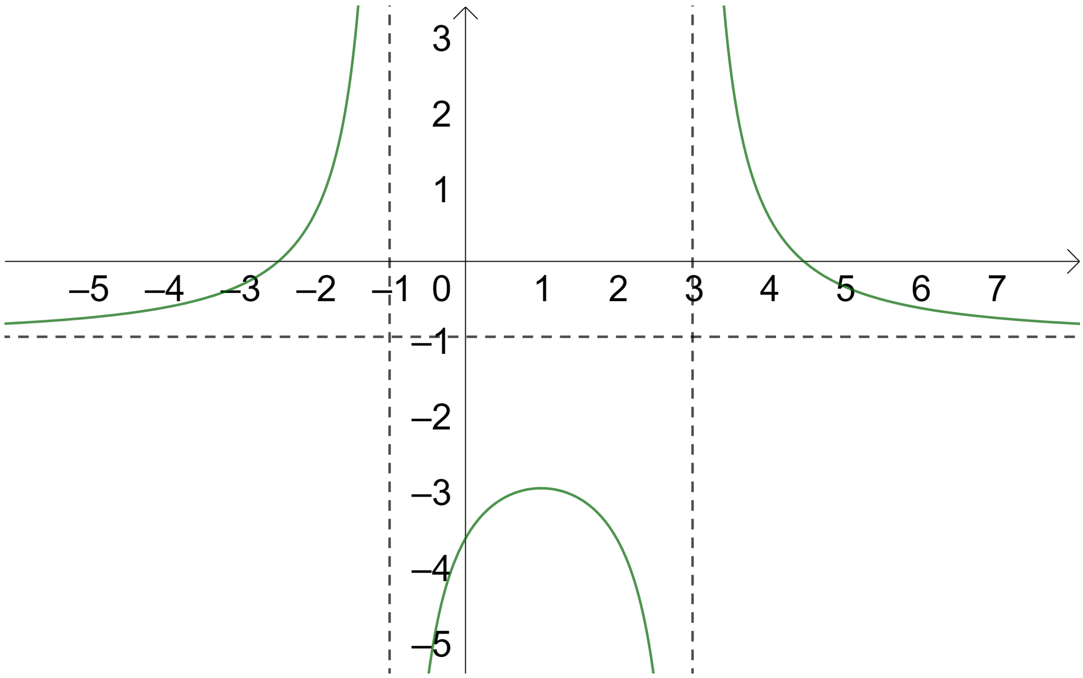
— $-x^2+2x+11 \underset{x\to3^+}{\longrightarrow} 8$ et $x^2-2x-3 \underset{x\to3^+}{\longrightarrow} 0^+$
Donc $f(x) \underset{x\to3^+}{\longrightarrow} +\infty$.
$-x^2+2x+11 \underset{x\to3^-}{\longrightarrow} 8$ et $x^2-2x-3 \underset{x\to3^-}{\longrightarrow} 0^-$

Donc $f(x) \underset{x \to 3^-}{\longrightarrow} -\infty$.

Les résultats sont semblables lorsque x tend vers -1. La méthodologie est la même.

7 Vérifications graphiques

L'étude de fonction est à présent terminée. Il est maintenant possible à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice de tracer la représentation graphique de la fonction et vérifier les résultat de variations et de limites.



Nous constatons finalement que notre étude de fonction a été correctement réalisé.