Leçon 36 : Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications.

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

N'apprenez plus sans comprendre

Niveau : Première et Terminale.

Prérequis :

— Repérage cartésien dans le plan

— Résolution d'équation

— Calcul littéral

Notations : Pour éviter une lourdeur dans les énoncés de ce document nous poserons les notations suivantes.

— $\mathbb{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

— Hormis mention contraire f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{I}$.

— On note C_f la courbe représentative de f.

— $a,\ b \in \mathbb{I},\ a \neq b$.

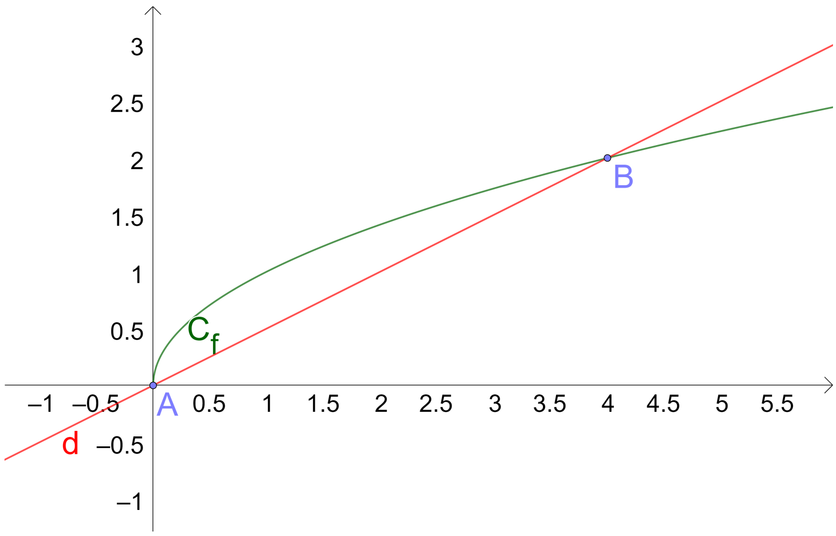
— $h \in \mathbb{R}^*,\ h = b - a$.

1 Taux d'accroissement et nombre dérivée.

1.1 Taux d'accroissement

Définition : On définit le taux d'accroissement de f entre les points a et b, noté $\tau_{f;a;b}$, par $\tau_{f;a;b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation graphique du taux d'accroissement



Sur la figure ci-dessus, les points A et B sont respectivement de coordonnées $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Le taux d'accroissement de f entre a et b est la pente (coefficient directeur) de la droite d.

1.2 Nombre dérivé

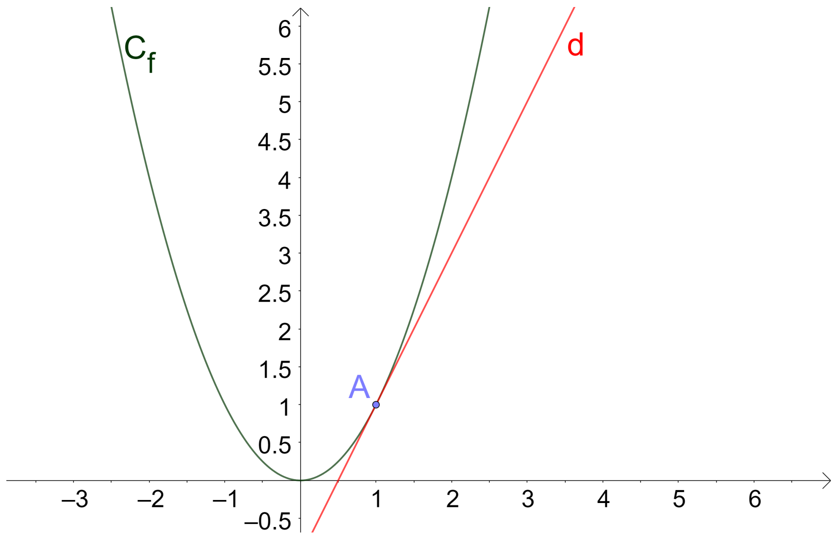
Philosophie : Le taux d'accroissement est un indicateur sur l'évolution moyenne d'une fonction f entre deux points a et b.
Un autre indicateur pertinent dans l'étude / prédiction d'une fonction est l'évolution instantanée en un point. Cette évolution instantanée s'obtient en faisant le taux d'accroissement de f entre deux points a et b très proches.

Définition : On définit, **lorsque cela est possible**, le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, par : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et si $f'(a)$ est fini. Le nombre dérivé de f en a est unique. On dira également que f est dérivable en a.

Remarque importante : Que signifie "lorsque cela est possible" ?

1. f est définie sur $\mathbb{I}$, il est donc nécessaire que $a + h \in \mathbb{I}$.
2. La définition fait intervenir une limite et cette limite n'existe pas toujours.

Interprétation graphique du nombre dérivé



Sur la figure ci-dessus, le point A a pour coordonnées $A(a; f(a))$. La droite d est la tangente à C_f passant par A. Le nombre dérivé de f en a, $f'(a)$, est la pente de la tangente.
De plus, d'après la définition précédente, f n'est pas dérivable en a si la tangente à C_f en a est verticale ou s'il y a "plusieurs" tangentes à C_f en a.

Propriété : On suppose que f est dérivable en a. Alors la tangente de C_f a pour équation $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Démonstration : On rappelle que l'équation d'une droite passant par un point $M(x_M; y_M)$ et de pente (coefficient directeur) p est : $y = p \times (x - x_M) + y_M$.
Par définition $f'(a)$ est la pente de la tangente à C_f en a et la tangente passe par le point $(a; f(a))$. On en déduit l'équation de la propriété.

1.3 Exercices

Exercice 1 : Calculs de nombres dérivés

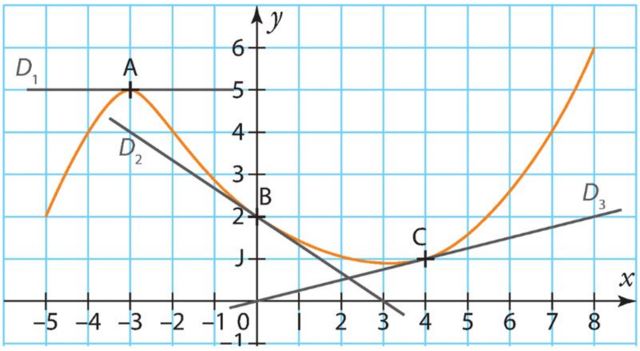
1. Montrer que $f \ : \ x \longrightarrow x^2$ est dérivable en 4.
2. Montrer que $f \ : \ x \longrightarrow \frac{2}{1-x}$ est dérivable en 1.

Exercice 2 : Recherche d'exemples

Donner deux exemples de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dérivables en 0. On justifiera ces résultats par le calcul et une représentation graphique sera donnée.

Exercice 3 : Lecture graphique (tiré Sésamaths 1ère Spé)

7 Sur le graphique suivant, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ d'une fonction h sur l'intervalle $[-5 ; 8]$. Les droites D_1, D_2 et D_3 sont respectivement tangentes à $\mathscr{C}_h$ aux points A d'abscisse -3, B d'abscisse 0 et C d'abscisse 4.

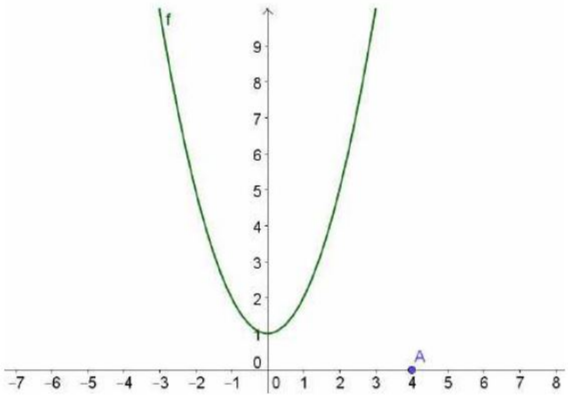


Lire sur le graphique les valeurs de $h(-3)$, $h(0)$, $h(4)$ et $h'(-3)$, $h'(0)$ et $h'(4)$.

Exercice 4 : Un problème de tangentes (tiré de l'épreuve sur dossier de CAPES 2019)

Dans un repère, on a représenté graphiquement la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2 + 1$ et le point $A(4\ ;\ 0)$.

Existe-il des tangentes à la courbe passant par le point A ?



2 Fonction dérivée

2.1 Définitions et propriétés

Définition : On dit que f est dérivable sur $\mathbb{I}$ si f est dérivable en tout point de $\mathbb{I}$.

Propriété : Si f est dérivable sur $\mathbb{I}$ alors f est continue sur $\mathbb{I}$. La réciproque est fausse.

Démonstration : Pour démontrer cette propriété il suffit de montrer que si f est dérivable en un point a alors f est continue en a et appliquer ce résultat pour tout a de $\mathbb{I}$.
Soit $a \in \mathbb{I}$, soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathbb{I}$.

Supposons f dérivable en a, c'est-à-dire : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$ avec $f'(a)$ fini. (*)

Montrons que f est continue en a, c'est-à-dire : $f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)$

D'après (*) :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a) &\Leftrightarrow f(a+h)-f(a) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} h \times f'(a) \\ &\Rightarrow f(a+h)-f(a) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\Rightarrow f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a) \end{aligned}$$

Conclusion : Si f est dérivable sur $\mathbb{I}$ alors f est continue sur $\mathbb{I}$. La réciproque est fausse (voir exercice 2 partie 1.3).

2.2 Opérations de référence

Philosophie : Utiliser la définition brut de dérivabilité en un point permet de montrer que certaines fonctions simples, notamment les fonctions de référence que nous verrons en partie 2.3, sont dérivables. Néanmoins les calculs peuvent être lourds, surtout pour des fonctions plus exotiques, par exemple $f : x \longrightarrow \frac{4x-1}{x^2-8x+10}$.
L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir des résultats permettant de simplifier le calcul de dérivés complexes.

Propriétés :

On suppose les fonctions f et g dérivables sur leurs domaines de définition.
On suppose que : $D_f = D_g = \mathbb{I}$ pour les résultats 1 à 3.
Pour le 4ème résultat on suppose que f est une fonction de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{F}$ et g est une fonction de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{G}$.

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2. $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

3. $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g^2(x)}$ avec g ne s'annulant pas.

4. $(g(f))'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{I}$, soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathbb{I}$.

1. Montrons que la dérivée d'une somme de fonction est la somme des dérivés. La démonstration pour la différence est identique.

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} &= \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&\underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a) + g'(a)
\end{aligned}$$

   Conclusion : $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\forall x \in \mathbb{I},\ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2. Montrons le résultat de dérivation d'un produit de fonctions.

$$\begin{aligned}
\frac{(f \times g)(a+h) - (f \times g)(a)}{h} &= \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= g(a+h) \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&\underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)
\end{aligned}$$

   Conclusion : $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\forall x \in \mathbb{I},\ (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

3. Montrons le résultat de dérivation d'un quotient de fonctions (f sur g où g ne s'annule pas).

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{f}{g}(a+h)-\frac{f}{g}(a)}{h} &= \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h} \\
&= \frac{\frac{f(a+h)\times g(a)-f(a)\times g(a+h)}{g(a+h)\times g(a)}}{h} \\
&= \frac{1}{g(a+h)\times g(a)} \times \frac{f(a+h)\times g(a)-f(a)\times g(a+h)}{h} \\
&= \frac{1}{g(a+h)g(a)} \times \frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(a+h)}{h} \\
&= \frac{1}{g(a+h)g(a)} \times (\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times g(a) - f(a) \times \frac{g(a+h)-g(a)}{h}) \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{g^2(a)}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\forall x \in \mathbb{I},\ (\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{g^2(x)}$

4. Montrons le résultat de dérivation d'une composition de fonctions.
   Pour cela écrivons les développements limités de f et g à l'ordre 1.

   $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + h \times f'(a) + o(h)$$

   $$g(a+h) \underset{h\to 0}{=} g(a) + h \times g'(a) + o(h)$$

   Ainsi :

$$
\begin{aligned}
g(f(a+h)) &\underset{h\to 0}{=} g(f(a) + h \times f'(a) + o(h)) \\
&\underset{h\to 0}{=} g(f(a)) + g'(f(a)) \times (h \times f'(a) + o(h)) + o(h \times f'(a) + o(h)) \\
&\underset{h\to 0}{=} g(f(a)) + g'(f(a)) \times h \times f'(a) + o(h)
\end{aligned}
$$

En somme :

$$\begin{aligned}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} &\underset{h\to 0}{=} \frac{g(f(a))+g'(f(a))\times h\times f'(a)+o(h)-g(f(a))}{h}\\ &\underset{h\to 0}{=} f'(a)\times g'(f(a))+o(1)\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)\times g'(f(a))\end{aligned}$$

Conclusion : $g(f)$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et $\forall x \in \mathbb{I},\ (g(f))'(x) = f'(x)\times g'(f(x))$

2.3 Fonctions de références

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$

Démonstration : Démontrons quelques résultats de ce tableau de référence.

1. En utilisant la définition de dérivabilité, montrons que la fonction dérivée de $x \longrightarrow x^n$ est $x \longrightarrow nx^{n-1}$.

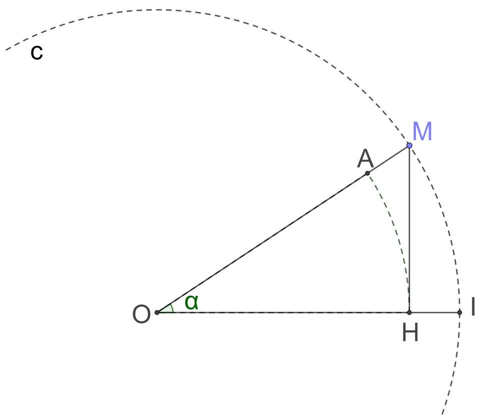
   Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{R}$, soit $h \in \mathbb{R}^*$.

$$
\begin{aligned}
\frac{(a+h)^n - a^n}{h} &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} \times h^k \times a^{n-k}\right) - a^n}{h} \\
&= \frac{a^n + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} \times h^k \times a^{n-k}\right) - a^n}{h} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times h^{k-1} \times a^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \times h^{k} \times a^{n-k-1} \\
&= \binom{n}{1} \times a^{n-1} + h \times \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \times h^{k-1} \times a^{n-k-1} \\
&= na^{n-1} + h \times \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \times h^{k-1} \times a^{n-k-1} \\
&\underset{h \to 0}{\longrightarrow} na^{n-1}
\end{aligned}
$$

Conclusion : La dérivée de la fonction $x \longrightarrow x^n$ est $x \longrightarrow nx^{n-1}$.

2. Montrons, avec des outils du collège et du lycée, que la dérivée de la fonction *sin* est la fonction *cos*.
Pour cela nous aurons besoin de montrer deux résultats intermédiaires.
   (a) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{sin(\alpha)}{\alpha} = 1$
   (b) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{cos(\alpha)-1}{\alpha} = 0$

   Pour démontrer le premier résultat nous utiliserons le figure ci-dessous. Pour démontrer le deuxième résultat, nous utiliserons le premier résultat.



Dans la figure ci-dessus, le cercle c est le cercle unité. On suppose que $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On note A_1 la section angulaire OAH, A_2 l'aire du triangle OHM et A_3 la section angulaire OIM.

$$\begin{aligned} A_1 \leq A_2 \leq A_3 &\Leftrightarrow \frac{\alpha \times cos^2(\alpha)}{2} \leq \frac{sin(\alpha) \times cos(\alpha)}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \\ &\Leftrightarrow cos(\alpha) \leq \frac{sin(\alpha)}{\alpha} \leq \frac{1}{cos(\alpha)} \end{aligned}$$

D'après le théorème des Gendarmes, en faisant tendre α vers 0 dans l'inégalité ci-dessus, on déduit que : $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{sin(\alpha)}{\alpha} = 1$.

Montrons le deuxième résultat :

$$\begin{aligned}
\frac{cos(h)-1}{h} &= \frac{cos(\frac{h}{2}+\frac{h}{2})-1}{h} \\
&= \frac{cos^2(\frac{h}{2})-sin^2(\frac{h}{2})-1}{h} \\
&= \frac{cos^2(\frac{h}{2})-sin^2(\frac{h}{2})-(cos^2(\frac{h}{2})+sin^2(\frac{h}{2}))}{h} \\
&= \frac{-2sin^2(\frac{h}{2})}{h} \\
&= \frac{-sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \times sin(\frac{h}{2}) \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} -1 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Les deux résultats intermédiaires sont démontrés. Montrons en revenant à la définition de dérivabilité que sin est dérivable et que sa dérivée est cos.
Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{sin(a+h)-sin(a)}{h} &= \frac{sin(a)\times cos(h)+sin(h)\times cos(a)-sin(a)}{h} \\
&= sin(a)\times\frac{cos(h)-1}{h}+cos(a)\times\frac{sin(h)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} sin(a)\times 0+cos(a)\times 1 \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} cos(a)
\end{aligned}$$

Conclusion : La dérivée de la fonction sin est la fonction cos. De la même manière on peut montrer que la dérivée de la fonction cos est la fonction $-sin$.

3. On considère dans ce cours que la fonction exponentielle est définie comme étant l'unique fonction telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'unicité de ce résultat se montre par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

4. On considère dans ce cours que la fonction ln est définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Une idée de démonstration est proposée dans l'exercice 6 de la partie 2.4.

2.4 Exercices

Exercice 1 : Calculer la dérivée de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x^3 - 7x + 4$.

Exercice 2 : Calculer la dérivée de la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = x \times cos(x) + x^2 \times sin(x)$.

Exercice 3 :

1. Déterminer le domaine de définition, D_{f_3}, de f_4.
2. Calculer la dérivée de la fonction f_3 définie sur D_{f_3} par : $f_3(x) = \frac{x^2-2x-11}{x^2+2x-3}$.

Exercice 4 :

1. Déterminer le domaine de définition, D_{f_4}, de f_4.
2. Calculer la dérivée de la fonction f_1 définie sur D_{f_4} par : $f_4(x) = tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$

Exercice 5 :
Calculer la dérivée de la fonction f_5 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_5(x) = cos(cos(x))$.

Exercice 6 : En définissant la fonction ln comme la fonction réciproque d'exponentielle et en admettant que ln soit dérivable. Déterminer la dérivée de la fonction ln.

3 Applications

3.1 Études de fonctions

Définition :

— On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J autour de x_0 tel que : $\forall x \in \mathbb{J},\ f(x) \geq f(x_0)$.

— On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J autour de x_0 tel que : $\forall x \in \mathbb{J},\ f(x) \leq f(x_0)$.

On appelle extremum local un minimum ou un maximum local.

Théorème fondamental :

1. Si $\forall x \in \mathbb{I},\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{I}$.
2. Si $\forall x \in \mathbb{I},\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{I}$.
3. Si $\forall x \in \mathbb{I},\ f'(x) = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{I}$.

Démonstration : La démonstration de ces résultats est long et passera par plusieurs sous-résultats. Nous démontrerons dans un premier temps le théorème de Rolle afin de démontrer le théorème des accroissements finis qui nous permettra de montrer les résultats du théorème fondamental de la dérivation.

Résultat intermédiaire 1 : Théorème de Rolle On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)$.

Démonstration résultat intermédiaire 1 : Si f est constante alors le résultat est évident.

Si f n'est pas constante alors il existe un extremum global de f atteint en $c \in]a;b[$. Quitte à considérer la fonction -f on suppose que f admet un maximum global en c.

On en déduit par définition de maximum de f en c :

— Posons $h \in \mathbb{R}^{*-}$, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

  En faisant tendre h vers 0, on en déduit : $f'(c) \leq 0$

— Posons $h \in \mathbb{R}^{*-}$, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

  En faisant tendre h vers 0, on en déduit : $f'(c) \geq 0$

Conclusion : $f'(c) = 0$

Résultat intermédiaire 2 : Théorème des accroissements finis On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a)$.

Démonstration résultat intermédiaire 2 : On pose la fonction g définie sur $[a;b]$ par $\forall x \in [a;b],\ g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b)-(f(a))}{b-a} \times (x-a))$.

g est dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]a;b[$. Soit $x \in [a;b]$

Par construction de g, $g(a) = g(b) = 0$. D'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On en déduit pour $x = c$.

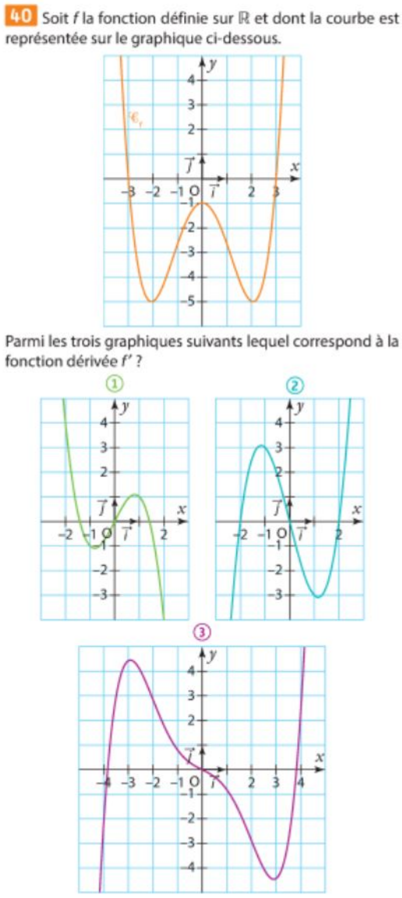
$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Conclusion : Il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a)$.

Le théorème des accroissements fini étant démontrer, les résultats sur les variations de fonctions sont évidents.
Par exemple, considérons f une fonction dérivable sur $\mathbb{I}$ et supposons que $\forall x \in \mathbb{I}, f'(x) > 0$. Soient $a, b \in \mathbb{I}, b > a$. D'après le théorème des accroissements finis : $(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a) > 0$.

Conclusion : f est strictement croissante sur $\mathbb{I}$. Les autres résultats du théorème fondamental se montrent de la même manière.

Exercice 1 : Lecture graphique (Tiré de Sésamaths 1ère)


40 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe est représentée sur le graphique ci-dessous.

Parmi les trois graphiques suivants lequel correspond à la fonction dérivée f' ?

①

②

③

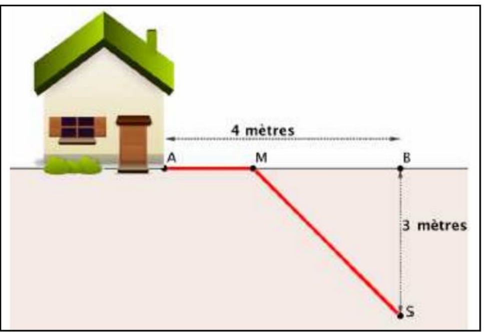
Exercice 2 : Étude de variations d'une fonction

Étudier la fonction $f \ : \ x \longrightarrow \frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$

Exercice 3 : Une optimisation (tiré d'une épreuve sur dossier CAPES 2019)

Une maison doit être raccordée, à partir du point A, à un réseau de gaz situé au point S, à 4 mètres de A horizontalement et à 3 mètres verticalement de B, à l'aide d'une conduite comme indiqué sur la figure ci-contre.
La conduite de gaz est schématisée en rouge.
L'installation de la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.

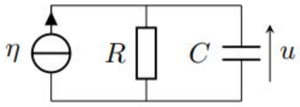
Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour rendre le coût de raccordement minimal ?



3.2 Équations différentielles

Une leçon sur les primitives et équations différentielles existe déjà. Un cours ne sera pas fait ici, seulement un exercice pluridisciplinaire.

Exercice 4 : Un peu d'électronique (Tiré feuille d'exercices Électronique 2, Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018)



La source idéale de courant du circuit ci-contre impose un échelon,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ I_0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension u pour $t > 0$.

3.3 Méthodes numériques

Les deux exercices ci-dessous sont longs. Ainsi seul les liens vers les exercices sont donnés pour faciliter la lecture de ce document. Libre au lecteur de remanier ces exercices pour les rendre plus courts.

Exercice 5 : Autour de la Méthode de Newton (Tiré feuille d'exercice Lycée adulte 1ère spé Chapitre Dérivation (Exercice 25 de la fiche))

$https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math1spe/04_fonction_derivee/04_e$

Exercice 6 : Autour de la méthode d'Euler (Tiré sujet 2 CAPES maths 2016 Problème 1)

$https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/EP2_2016.pdf$