Leçon 1 : Dénombrement

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

Niveau : Terminale spécialité

Prérequis : Vocabulaire ensembliste et probabiliste, notions sur les suites, raisonnement par récurrence

1 Introduction

Le dénombrement est le fait de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble. A priori cette notion semble élémentaire, il suffit de compter...
Nous verrons dans cette leçon qu'il existe suivant les différents contextes de nombreuses méthodes de dénombrement et qu'ainsi "compter n'est pas si facile".

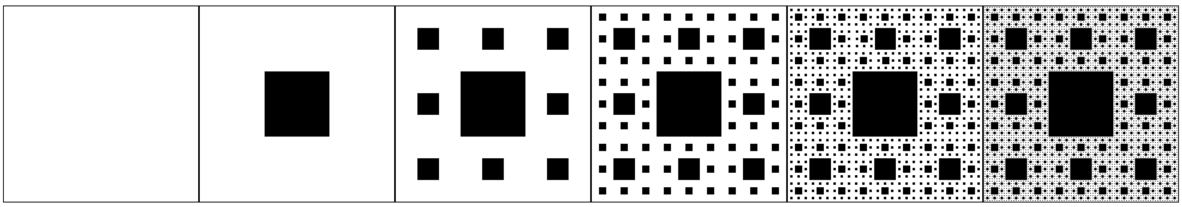
2 A l'aide des suites

Une méthode de dénombrement simple est l'utilisation des suites. Les connaissances sur les suites étant supposées connues, on se contentera de donner deux exemples / exercices.

2.1 Château de cartes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une formule donnant le nombre de cartes nécessaire pour réaliser un château de cartes à n étages.

2.2 Tapis de Sierpinski



L'image ci-dessus représente les six premières étapes de la construction du tapis de Sierpinski. Pour construire ce tapis on procède de la manière suivante :

1. A l'étape 0, on considère un carré entièrement blanc de côté 1.
2. A l'étape 1, On divise le carré précédent en 9 et on colorie le centre en noir.
3. A l'étape n+1, On reprend le résultat de l'étape n, on divise tous les carrés blancs en 9 et on colorie les centres en noir.

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une formule donnant le nombre de carrés noirs à l'étape n.

3 Principes élémentaires de dénombrement

Les principes qui vont être énoncés ont déjà été rencontré par les élèves bien avant la terminale. Ces résultats semblent donc relever du bon sens, mais comment les énoncer et démontrer proprement ?

3.1 Principe additif

Propriété : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, E_2, ..., E_k$ k ensembles deux à deux disjoints de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre d'éléments de $E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_k$ vaut $n_1 + n_2 + ... + n_k$

Démonstration : Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ l'hypothèse de récurence HR_k : " Pour tout ensembles deux à deux disjoints $E_1, E_2, ..., E_k$ de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$.
$card(E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_k) = n_1 + n_2 + ... + n_k$"

Initialisation : Pour k=1 le résultat est immédiat.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose HR_k vraie, montrons que HR_{k+1} est également vraie.

Soient $E_1, E_2, ..., E_k, E_{k+1}$ k+1 ensembles deux à deux disjoints de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}^*$.
Par hypothèse de récurrence $card(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k) = n_1 + n_2 + ... + n_k$.
On note $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k$.
E_{k+1} est disjoint avec E on en déduit que $card(E \cup E_{k+1}) = card(E) + card(E_{k+1})$.

Finalement : $card(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k \cup E_{k+1}) = n_1 + n_2 + ... + n_k + n_{k+1}$. Ainsi HR_{k+1} est vraie.

Conclusion : HR_1 est vraie et l'hypothèse de récurrence est héréditaire. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensembles deux à deux disjoints $E_1, E_2, ..., E_k$ de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$.
$card(E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_k) = n_1 + n_2 + ... + n_k$

3.2 Principe multiplicatif

3.2.1 Définition et propriété

Propriété : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, E_2, ..., E_k$ k ensembles de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$.
On a alors : $card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_k) = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$

Démonstration : Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ l'hypothèse de récurence HR_k : " Pour tout ensembles $E_1, E_2, ..., E_k$ de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$.
$card(E_1 \times E_2 \times .... \times E_k) = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$"

Initialisation : Pour k=1 le résultat est immédiat.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose HR_k vraie, montrons que HR_{k+1} est également vraie.

Soient $E_1, E_2, ..., E_k, E_{k+1}$ k+1 ensembles de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}^*$.
Par hypothèse de récurrence $card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_k) = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$.
On note $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_k$.
Pour tout $i \in 1, 2, ..., n_{k+1}$, on note d_i un élément de E_{k+1}.

$$\begin{aligned}
card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_k \times E_{k+1}) &= card(E \times E_{k+1}) \\
&= card(E \times d_1) + card(E \times d_2) + ... + card(E \times d_{k+1}) \\
&= n_1 \times n_2 \times ... \times n_k + n_1 \times n_2 \times ... \times n_k + ... + n_1 \times n_2 \times ... \times n_k \\
&= n_1 \times n_2 \times ... \times n_k \times n_{k+1}
\end{aligned}$$

HR_{k+1} est donc vraie.

Conclusion : HR_1 est vraie et l'hypothèse de récurrence est héréditaire. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensembles deux à deux disjoints $E_1, E_2, ..., E_k$ de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$
$card(E_1 \times E_2 \times .... \times E_k) = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$

3.2.2 Représentations

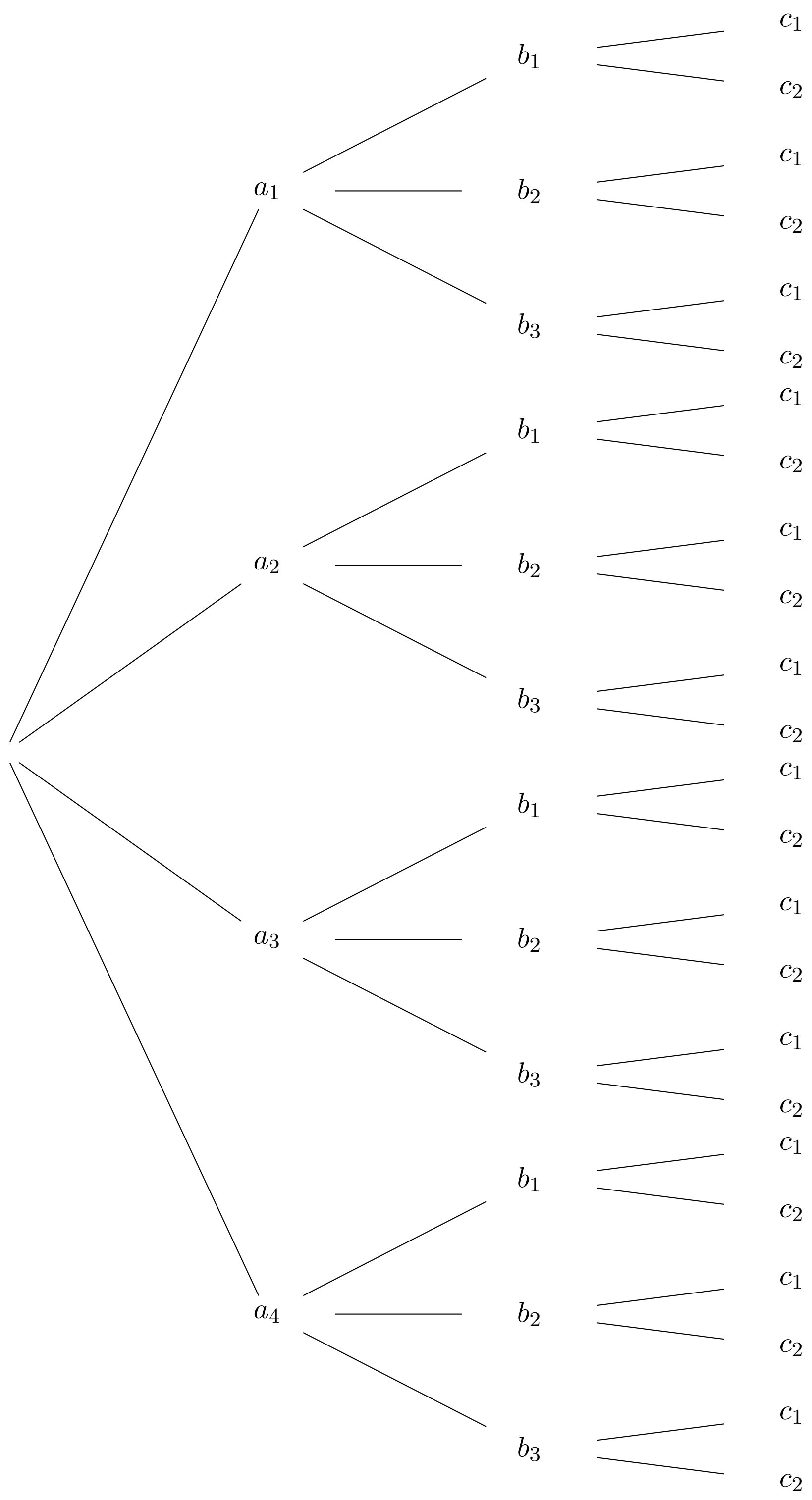
Dans le cas de 2 ensembles E_1 et E_2 de cardinaux respectifs n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}^*$.
On pose $E_1 = \{a_1, ..., a_{n_1}\}$ et $E_1 = \{b_1, ..., b_{n_2}\}$.

On peut représenter l'ensemble $E_1 \times E_2$ par un tableau à doubles entrées.

	a_1	a_2	...	a_{n_1}
b_1	(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	...	(a_{n_1}, b_1)
b_2	(a_1, b_2)	(a_2, b_2)	...	(a_{n_1}, b_2)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
b_{n_2}	(a_1, b_{n_2})	(a_2, b_{n_2})	...	(a_{n_1}, b_{n_2})

Soit $k \geq 2$, soient $E_1, E_2, ..., E_k$ k ensembles de cardinaux respectifs $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $k, n_1, n_2, ..., n_k$ suffisamment petits il est possible de représenter les éléments de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_k$ par un arbre de dénombrement.

Exemple : On considère 3 ensembles E_1, E_2, E_3.
On pose $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $E_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$, et $E_3 = \{c_1, c_2\}$.


a_1
b_1 c_1 c_2
b_2 c_1 c_2
b_3 c_1 c_2
a_2
b_1 c_1 c_2
b_2 c_1 c_2
b_3 c_1 c_2
a_3
b_1 c_1 c_2
b_2 c_1 c_2
b_3 c_1 c_2
a_4
b_1 c_1 c_2
b_2 c_1 c_2
b_3 c_1 c_2

4 Listes, arrangements et combinaisons

4.1 p-listes ou p-uplets

Définition : Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-uplet ou p-liste de E tout élément de E^p.

Propriété : Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n^p p-uplets.

Démonstration : Le résultat se démontre en utilisant le principe multiplicatif.

4.2 Arrangements

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle "factorielle n" le nombre noté "n !" et défini par :
$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$
Par convention : $0! = 1$

Définition : Soit E un ensemble de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-arrangement de E tout p-uplet de E où chaques éléments du p-uplet sont deux à deux disjoints.

Propriétés : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $p > n$ alors il n'existe pas de p-arrangement de E.
2. Si $p \leq n$ alors il existe exactement $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E.
   On note A_n^p le nombre de p-arrangements de E .

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $p > n$, on rappelle qu'un p-arrangement de E est un p-uplet de E où chaques termes du p-uplet sont deux à deux disjoints.

   Supposons par l'absurde qu'il existe un p-arrangement de E. Alors par définition les n premiers éléments du p-uplet sont distincts.

   Il est impossible de choisir le (n+1)-ème terme distinct des n précédents car E contient n éléments.

   On en conclut qu'il n'existe pas de p-arrangement de E si $p > n$.

2. Si $p \leq n$, par principe multiplicatif on a :

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble de cardinal n. On appelle permutation de E tout n-arrangement de E.

Remarque : On peut considérer une permutation comme une application bijective de E dans E.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble de cardinal n. Il existe exactement $n!$ permutation de E.

Démonstration : Le résultat est immédiat en utilisant la propriété sur le nombre de p-arrangements.

4.3 Combinaisons

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit E un ensemble de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle p-combinaison de E tout p-arrangement de E sans prise en compte de l'ordre des éléments.

4.3.1 Propriétés :

1. Si $p > n$, alors il n'existe pas de p-combinaison de E.
2. Si $p \leq n$ alors il y a exactement $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-combinaisons de E.

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons de E. On appelle également ce nombre "k parmis n" pour des raisons que l'on verra par la suite.

Démonstration :

1. Voir argument sur les arrangements.
2. On rappelle qu'il existe exactement $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E.

   Pour une p-combinaison de E donnée, il existe par principe multiplicatif exactement $p!$ p-arrangements de E.

   On en déduit qu'il y a exactement $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-combinaisons de E.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \{0, ..., n-1\}$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

On appelle cet identité la formule de Pascal. L'ensemble des termes "k parmis n" ou "nombres binomiaux" peuvent être écrits dans un tableau que l'on appelle triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \{1, ..., n-1\}$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \times (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \times (n-k-1)!} \\
&= \frac{n! \times (k+1)}{k! \times (n-k)! \times (k+1)} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)! \times (n-k-1)! \times (n-k)} \\
&= \frac{n!}{(k+1)! \times (n-k)!} \times (k+1+n-k) \\
&= \frac{n!}{(k+1)! \times (n-k)!} \times (n+1) \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \times (n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in \{0, ..., n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in \{0, ..., n\}$,

En écrivant $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ à l'aide de factorielles, le résultat est immédiat.

4.3.2 Applications des combinaisons

Caractérisation : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in \{0, ..., n\}$
On considère un arbre binaire complet à n branches.

Le nombre de chemin à k succès parmis n tentatives est égal à $\binom{n}{k}$.

Démonstration : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence HR_n : "Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, dans un arbre binaire complet à n branches, le nombre de chemins à k succès parmis n tentatives est égal à $\binom{n}{k}$".

Initialisation : Pour $n = 0$, "il n'y a pas d'arbre", on peut voir le fait d'avoir 0 succès parmis 0 tentative comme égal à $1 = \binom{0}{0}$.
Ainsi HR_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vraie, montrons que HR_{n+1} est également vraie.

On considère un arbre binaire complet à n+1 branches. Soit $k \in \{0, ..., n+1\}$.

1. Si $k = 0$, il y a $1 = \binom{n+1}{0}$ chemin à 0 succès parmis n+1 tentatives.
2. Si $k = n+1$, il y a $1 = \binom{n+1}{n+1}$ chemin à n+1 succès parmis n+1 tentatives.
3. Si $k \in 1, ..., n$, montrons que le nombre de chemins à k succès parmis n+1 tentatives est égal à $\binom{n+1}{k}$.

   On utilise le principe additif. Il y a y 2 possibilités pour la n+1ème tentative.

   (a) Si la n+1ème tentative est un échec alors pour obtenir k succès parmi n+1 tentatives il est nécessaire et suffisant d'obtenir k succès sur les n tentatives précédentes.
   Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités d'obtenir ces k succès parmis les n premières tentatives.

   (b) Si la n+1ème tentative est un succès alors pour obtenir k succès parmi n+1 tentatives il est nécessaire et suffisant d'obtenir k-1 succès sur les n tentatives précédentes.
   Il y a $\binom{n}{k-1}$ possibilités d'obtenir ces k succès parmis les n premières tentatives.

   Ainsi le nombre de chemins à k succès parmis n+1 tentatives est égal à $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ par la formule de Pascal. HR_{n+1} est donc vraie.

   Conclusion : HR_1 est vraie et l'hypothèse de récurrence est héréditaire. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, le nombre de chemins à k succès parmis n tentatives dans un arbre binaire complet est égal à $\binom{n}{k}$.

Propriété (Binôme de Newton) : Soient a et b $\in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a le résultat suivant :

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Démonstration : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence HR_n : "Pour tout a et b $\in \mathbb{R}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Initialisation : Pour $n = 0$, soient a et b $\in \mathbb{R}$,

D'une part : $(a+b)^0 = 1$

D'autre part : $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0$

Ainsi HR_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vraie, montrons que HR_{n+1} est également vraie.
Soient a et b $\in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{0}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) a^k b^{n-k} \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) a^k b^{n-k} \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

Ainsi HR_{n+1} est vraie.

Conclusion : HR_0 est vraie et l'hypothèse de récurrence est héréditaire. Finalement, pour tout a et b $\in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble de cardinal n.
Il y a exactement 2^n parties de E.

Démonstration : Soit $k \in \{0, ..., n\}$, On note E_k l'ensemble des parties contenant k éléments.

On a : $E = E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n$, par principe additif,

$$\begin{aligned}
card(E) &= card(E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n) \\
&= card(E_0) + card(E_1) + ... + card(E_n) \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\
&= (1+1)^n \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

4.4 Exercices d'applications et plus avancés

4.4.1 Exercice 1 :

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmis 10 femmes et 5 hommes ?

4.4.2 Exercice 2 :

Quelle est la probabilité de gagner le gain maximum au loto ? La probabilité des gains inférieurs ?

4.4.3 Exercice 3 :

Dans une course du quinté à 18 chevaux, quelle est la probabilité de gagner (pas nécessairement le gain maximum) ?

4.4.4 Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, combien y-a -t-il de zéros à la fin de n ! ?

4.4.5 Exercice 5 :

On jette trois dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotés de 1 à 6.

1. Combien de résultats possibles y-a t-il ?
2. Dans combien de cas obtient-on deux résultats pairs ?
3. Dans combien de cas obtient-on des résultats distincts ?
4. Dans combien de cas obtient-on deux résultats égaux ?

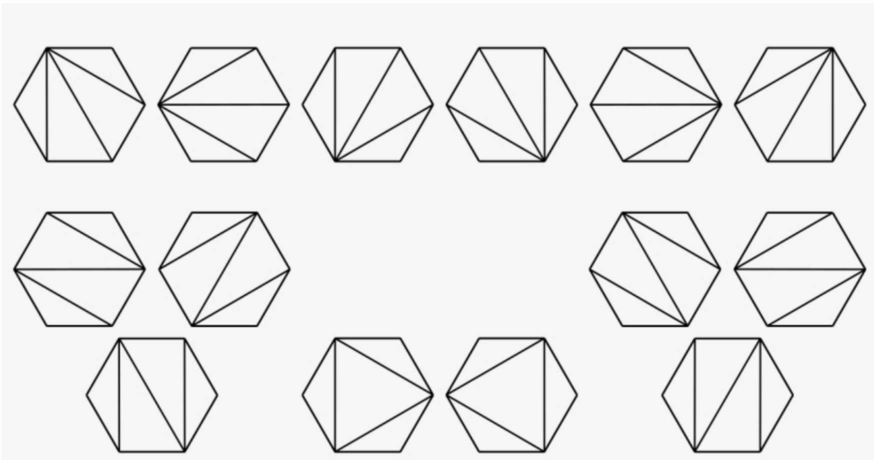
4.4.6 Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dans le plan on considère n droites telles que deux d'entres elles ne soient pas parallèles et que trois d'entre elles ne soient pas concourantes en un point. Combien y a-t-il de points d'intersection entre ces droites prises deux à deux ?

4.4.7 Exercice 7 :

1. Démontrer que $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ où les entiers p, k et n vérifient $0 \leq p \leq k \leq n$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

4.4.8 Exercice 8 ()Nombres de Catalan) :



L'image ci-dessus représente l'ensemble des 14 manières de trianguler un héxagone régulier. L'objectif de cet exercice est de détermnier un formule donnant le nombre de manières de trianguler un (n+2)-gone régulier avec $n \in \mathbb{N}$. On note C_n ce nombre. On a donc $C_4 = 14$. On pose par convention $C_0 = 1$.

Ces nombres s'appellent les nombres de Catalan et permettent de représenter de nombreux phénomènes combinatoires. Dans cet exercice nous nous pencherons sur deux de ces phénomènes.

1. Déterminer C_1, C_2 et C_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer le résultat suivant : $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.
3. La question précédente a permis de trouver une relation de récurrence sur C_n mais pas une formule explicite.

   Intéressons nous aux mots de Dyck.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un mot de Dyck est un mot formé de n lettres X et n lettres Y tel qu'aucun préfixe (mot obtenu en supprimant les dernières lettres à partir d'un rang quelconque) ne contienne strictement plus de Y que de X.

   On note D_n le nombre de mot de Dick de longueur 2n avec comme convention que $D_0 = 1$.

   Montrer que (D_n) admet la même relation de récurrence que (C_n) et en déduire que $(D_n) = (C_n)$.

   (a) De combien de manières peut-on répartir n lettres X dans un mot de longueur 2n ?

   (b) Parmis les mots ci-dessus, combien ne sont pas des mots de Dyck ?
4. D'après la question précédente, déduire une expression de C_n pour $n \in \mathbb{N}$.