Correction d'un exercice de BAC autour des matrices

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

1 Introduction

L'objectif de ce document est de corriger un exercice très classique sur les matrices. L'exercice présente les notions suivantes :

- Modélisation d'un problème par des matrices
- Calculs sur les matrices (produit de matrices, inverse d'une matrice)
- Raisonnement par récurrence

Le sujet se trouve ci-dessous. Il s'agit de l'exercice 4 de l'épreuve bac 2013 de maths spécialité maths, sujet métropole.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013+n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

   b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0$$

   Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

2 Correction

1. Pour répondre à cette question, il est nécessaire de bien comprendre la phrase suivante de l'énoncé : "Chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.". Le texte a été colorée et le code couleur pour les calculs ci-dessous sont similaires.

   Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = (1 - 0.05) \times v_n + 0.01 \times c_n = 0.95 \times v_n + 0.01 \times c_n$$
$$c_{n+1} = 0.05 \times v_n + (1 - 0.01) \times c_n = 0.05 \times v_n + 0.99 \times c_n$$

2. On cherche à résoudre l'équation matricielle $AX = Y$ où X est l'inconnue.

$$\begin{aligned} & AX = Y \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times Y \\ \Leftrightarrow\ & X = A^{-1} \times Y \end{aligned}$$

   ATTENTION : La méthode de résolution ci-dessus fonctionne uniquement si la matrice A est belle et bien inversible !

   On rappelle le résultat suivant : Une matrice est inversible si son **déterminant** est non nul. Pour une matrice A de taille 2×2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det(A) = a \times d - b \times c$.
   Si $det(A) \neq 0$ alors $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
   Dans notre exemple, $det(A) = 0.95 \times 0.99 - 0.05 \times 0.01 = 0.94 \neq 0$. Donc la matrice A est inversible et : $A^{-1} = \frac{1}{0.94} \begin{pmatrix} 0.99 & -0.01 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{99}{94} & \frac{-1}{94} \\ \frac{-5}{94} & \frac{95}{94} \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\begin{aligned}
&X = A^{-1} \times Y \\
\Leftrightarrow\ &X = \frac{1}{94}\begin{pmatrix} 0.99 & -0.01 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &X = \frac{1}{94}\begin{pmatrix} 0.99 \times c - 0.01 \times d \\ -0.05 \times c + 0.95 \times d \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{94}\begin{pmatrix} 0.99c - 0.01d \\ -0.05c + 0.95d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. (a) Dans un premier temps :

$$\begin{aligned}
P \times Q &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-5) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 5 \times 1 + 1 \times (-5) & 5 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 6I_d
\end{aligned}$$

Dans un second temps :

$$\begin{aligned}
Q \times P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ (-5) \times 1 + 1 \times 5 & (-5) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 6I_d
\end{aligned}$$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$

(b) Pour cette question il suffit de calculer en utilisant le résultat précédent.

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{6}QAP \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.95 & 0.01 \\ 0.05 & 0.99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \times 0.95 + 1 \times 0.05 & 1 \times 0.01 + 1 \times 0.05 \\ (-5) \times 0.95 + 1 \times 0.05 & (-5) \times 0.01 + 1 \times 0.99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4.7 & 0.94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ (-4.7) \times 1 + 0.94 \times 5 & (-4.7) \times (-1) + 0.94 \times 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5.64 \end{pmatrix} \\
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.94 \end{pmatrix} = D
\end{aligned}$$

(c) Par raisonnement par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $P_n \ : \ A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie.

Initialisation : Pour $n = 1$, la question précédente montre que P_1 est vraie.

$$\begin{aligned}
& P^{-1}AP = D \\
\Leftrightarrow\ & PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & A^1 = PD^1P^{-1}
\end{aligned}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose P_n vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie. Montrons que P_{n+1} est également vraie. Autrement dit montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A \\
&= A^n \times PDP^{-1} \text{ (car } P_1 \text{ est vraie)} \\
&= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= PD^nI_dDP^{-1} \\
&= PD^nDP^{-1} \\
A^{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

Finalement P_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété P_1 est vraie et l'hérédité est vérifiée. On en déduit que la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}$.

4. L'énoncé nous donne le résultat suivant :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0.94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0.94^n)c_0$.

La question de la répartition à long terme se traduit par trouver les limites de (v_n) et (c_n) en $+\infty$.
$-1 < 0.94 < 1$ donc $0.94^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}v_0 + \frac{1}{6}c_0 = \frac{1}{6} \times 0.3 \times 250000 + \frac{1}{6} \times 0.7 \times 250000 \approx 41667$

Enfin le nombre d'habitant étant supposé constant, on en déduit que :
$c_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 250000 - \frac{1}{6}v_0 + \frac{1}{6}c_0 \approx 208333$

Conclusion : A long terme la répartition des habitants dans la région se rapprochera des valeurs suivantes : environ 42 000 personnes en villes et 208 000 à la campagne.