MATh.en.JEANS : Cookies ou muffins - Collège Paul-Émile Victor (Branne) 2021-2022

Sébastien TAURAND - Cours particuliers à domicile

31 juillet 2022

INFINITY

N'apprenez plus sans comprendre

1 Énoncé

Lors d'un goûter d'anniversaire Blanche a préparé des muffins et des cookies. Elle propose un jeu aux deux enfants les plus gourmands. Chacun son tour, vous allez prendre des cookies et/ou des muffins selon les règles suivantes.
A chaque tour vous pouvez :

- **choix 1 :** soit prendre autant de cookies que vous voulez (mais pas de muffins) ;
- **choix 2 :** soit prendre autant de muffins que vous voulez (mais pas de cookies) ;
- **choix 3 :** soit prendre le même nombre de cookies que de muffins (autant que vous voulez, mais le même nombre de chaque).

Celui qui ne peut plus rien prendre à perdu.

Y a-t-il une stratégie gagnante pour gagner à ce jeu ? Évidemment cela dépend du nombre de cookies et de muffins. Par exemple avec deux enfants extrêmement gourmands et 139 cookies pour 245 muffins, faut-il jouer en premier ou en deuxième ?

2 Notations

Afin de faciliter la compréhension du lecteur nous utiliserons les notations suivantes pour désigner une **position**. "$(17; 24) \leftarrow J_1$".
Cette notation signifie qu'il y a actuellement 17 cookies, 24 muffins et que c'est au tour du joueur 1.

Une partie complète se notera ainsi de la manière suivante : (les annotations en bleues sont indiquées uniquement dans un but pédagogique pour cette première partie).

$(8; 10) \leftarrow J_1$	
$(8; 7) \leftarrow J_2$	Le joueur 1 a mangé 3 muffins.
$(5; 4) \leftarrow J_1$	Le joueur 2 a mangé 3 cookies et 3 muffins.
$(2; 4) \leftarrow J_2$	Le joueur 1 a mangé 3 cookies.
$(2; 0) \leftarrow J_1$	Le joueur 2 a mangé 4 muffins.
$(0; 0) \leftarrow J_2$	Le joueur 1 a mangé 2 cookies.

Le joueur 2 a perdu, il ne peut plus rien manger.

3 Les cas de bases

Intéressons nous aux positions immédiatement gagnantes (mat en 1 en vocabulaire échiquéen) que nous appellerons "cas de base".

Pour n entier naturel non nul, il est évident d'après les règles du jeu, que sont les **choix 1 ; 2 et 3**, que les cas de base sont $(n; 0)$, $(0; n)$ et $(n; n)$. Nous ferons référence à ces cas de base respectivement par **case de base 1, cas de base 2 et cas de base 3**.

Une possibilité de stratégie est de se ramener à un cas de base pour gagner. Un autre point de vue est d'amener l'adversaire à une position perdante.

Remarque importante : muffins ou cookies, cela n'a pas grande importance. Autrement dit, pour tout $x, y \in \mathbb{N}$ les positions $(x; y)$ et $(y; x)$ sont équivalentes.

4 Un cas de zugzwang et ses conséquences

Définition : On appelle "zugzwang" une position où le joueur qui a le trait (qui doit jouer) aimerait pouvoir passer.

Propriété : La position (1 ;2) est un zugzwang.

Démonstration : Supposons que ce soit au joueur 1 de jouer.
Montrons que quoiqu'il joue, il perdra.

— L'unique possibilité d'appliquer le **choix 1** est la suivante :

$$(1;2) \leftarrow J_1$$
$$(0;2) \leftarrow J_2$$
$$(0;0) \leftarrow J_1$$

Il s'agit du **cas de base 2.**

Le joueur 1 a perdu.

— Il y a deux possibilités d'appliquer le **choix 2**.
La première est :

$$(1;2) \leftarrow J_1$$
$$(1;1) \leftarrow J_2$$
$$(0;0) \leftarrow J_1$$

Il s'agit du **cas de base 3.**

Le joueur 1 a perdu.
La deuxième est :

$$(1;2) \leftarrow J_1$$
$$(1;0) \leftarrow J_2$$
$$(0;0) \leftarrow J_1$$

Il s'agit du **cas de base 1.**

Le joueur 1 a perdu.

— L'unique possibilité d'appliquer le **choix 3** est la suivante :

$$(1;2) \leftarrow J_1$$
$$(0;1) \leftarrow J_2$$
$$(0;0) \leftarrow J_1$$

Il s'agit du **cas de base 2.**

Le joueur 1 a perdu.

Conclusion : $(1;2)$ est bien un zugzwang.

Corollaire 1 : Soit n un entier naturel, $n \neq 2$. La position $(1;n)$ est une position gagnante.

Démonstration : Les positions particulières $(1;0)$ et $(1;1)$ sont des **cas de base.**

Pour $n \geq 3$, on amène par **choix 2** l'adversaire à la position $(1;2)$ qui est un zugzwang.

Corollaire 2 : Soit n un entier naturel, $n \neq 1$. La position $(2;n)$ est une position gagnante.

Démonstration : Les positions particulières $(2;0)$ et $(2;2)$ sont des **cas de base.**

Pour $n \geq 3$, on amène par **choix 2** l'adversaire à la position $(2;1)$ qui est un zugzwang.

Corollaire 3 : Soit n un entier naturel, $n \neq 1$. La position $(n;n+1)$ est une position gagnante.

Démonstration : La position particulière $(0;1)$ est un **cas de base.**

Pour $n \geq 2$, on amène par **choix 3** l'adversaire à la position $(1;2)$ qui est un zugzwang.

Ces corollaires montrent que dans certains cas il est possible de forcer l'adversaire à un zugzwang. Une idée à explorer peut être de trouver tous / d'autres zugzwang.

5 Généralisation des positions de zugzwang

L'objectif de cette partie est de trouver un "algorithme de construction" de zugzwang. On notera ces positions Z_r avec r un entier naturel non nul. D'après la partie précédente, $Z_1 = (1; 2)$.

On veillera à respecter les trois conditions suivantes qui permettront d'avoir une stratégie optimale.

— **Condition 1 :** Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, Z_r est un zugzwang.

— **Condition 2 :** Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que Z_r soit de la forme $(n; n + r)$.

— **Condition 3 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $r \in \mathbb{N}^*$ tel que n appartienne à la position Z_r.

Explications :

— L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir des positions de zugzwang. Ainsi la **condition 1** est naturelle. Lors d'une partie du jeu, on s'efforcera lorsque l'on est gagnant à faire passer l'adversaire d'une position Z_r à une position Z_k avec $1 \leq k < r$ et ainsi de suite jusqu'à la victoire.

— Comprenons la **condition 2** à l'aide des résultats sur le zugzwang $(1; 2)$. Supposons connu uniquement Z_1. D'après le corollaire 3, on connaît l'issu finale de toutes les positions $(n; n + 1)$. Il n'y a pas d'autres positions de zugzwang de la forme $(n; n+1)$. Il est naturel de rechercher ensuite une position de zugzwang de la forme $(n; n + 2)$ pour ensuite trouver un équivalent du corollaire 3. En continuant ainsi la **condition 2** semble pertinente.

— L'intérêt que chaque entier n appartienne à une position Z_r est de pouvoir rapidement se ramener à une position Z_r. L'intérêt étant de savoir directement au premier tour du jeu si l'on est dans une position gagnante ou perdante.
Enfin dans l'algorithme de construction tout nombre n doit se retrouver dans une **unique** position Z_r. En supposant que ce ne soit pas le cas, par exemple en supposant $Z_2 = (3; 5)$ qui est une position de zugzwang et $Z_3 = (5; 8)$ dont on ne sait pas encore s'il s'agit d'un zugzwang. On peut dire que Z_3 n'est pas un zugzwang car par **choix 2** on amène l'adversaire à la position $Z_2 = (5; 3)$. Ce qui explique la nécessité pour tout nombre n d'être dans une **unique** position Z_r

Construction : Considérons l'ensemble des entiers et $r \in \mathbb{N}^*$.
A l'étape r, on note n le plus petit entier non compris dans une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$. On pose $Z_r = (n; n+r)$.

Voici une illustration étape par étape, en commençant par l'étape 0 où il n'y a aucune position créée.

Étape 0 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Étape 1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_1 = (1; 2)$

Étape 2 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_2 = (3; 5)$

Étape 3 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_3 = (4; 7)$

Étape 4 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_4 = (6; 10)$

Étape 5 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_5 = (8; 13)$

Étape 6 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_6 = (9; 15)$

Étape 7 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$Z_7 = (11; 18)$

Preuve de la validité de l'algorithme
Montrons que l'algorithme décrit ci-dessus vérifie les **conditions 1, 2 et 3**.
On rappelle le principe de construction des positions Z_r avec $r \in \mathbb{N}^*$.

"A l'étape r, on note n le plus petit entier non compris dans une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$. On pose $Z_r = (n; n+r)$."

— Par construction même la **condition 2** est vérifiée.
— Par construction même, tout nombre entier naturel non nul n appartient à une position Z_r. Reste à montrer l'unicité de cette position Z_r.

  Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_r = (n_r; n_r + r)$ et $Z_{r+1} = (n_{r+1}; n_{r+1} + r + 1)$.
  Par construction même $n_r < n_{r+1}$. On en déduit que $n_r + r < n_{r+1} + r + 1$.
  Enfin par construction même $n_{r+1} \neq n_r + r$.
  Ces arguments suffisent à justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une **unique** position Z_r contenant n. Autrement dit la **condition 3** est vérifiée.
— Montrons par récurrence forte sur $r \in \mathbb{N}^*$ la propriété H_r : "Z_r est un zugzwang". Autrement dit montrons que la **condition 1** est vérifiée.

  Initialisation : Pour $r = 1$ nous avons montré dans un paragraphe précédent que la position $Z_1 = (1; 2)$ est un zugzwang.

  Hérédité : Soit $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ fixé. On suppose H_k vraie pour tout $k \in \{1, ..., r-1\}$. Montrons que H_r est également vraie.

  On considère la position $Z_r = (n; n+r)$ et on suppose que c'est au tour du joueur 1. Montrons que dans tous les cas son adversaire va le ramener à une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$.
  — Si le joueur 1 applique le **choix 1**. Alors en posant $p \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\begin{aligned} (n; n+r) &\leftarrow J_1 \\ (n-p; n+r) &\leftarrow J_2 \end{aligned}$$

    Si $p = n$ on se ramène au **cas de base 2**.
    Sinon par construction même $n - p$ appartient à une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$. Le joueur 2 va donc amener le joueur 1 sur cette position Z_k par **choix 2**.
  — Si le joueur 1 applique le **choix 2**. Alors en posant $p \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\begin{aligned} (n; n+r) &\leftarrow J_1 \\ (n-p; n+r-p) &\leftarrow J_2 \end{aligned}$$

Il s'agit du même raisonnement que pour le cas précédent.

— Si le joueur 1 applique le **choix 3**. Alors en posant $p \in \{1, ..., n+r\}$, on a :

$$
\begin{aligned}
(n; n+r) &\leftarrow J_1 \\
(n; n+r-p) &\leftarrow J_2
\end{aligned}
$$

Si $p = n+r$ ou $p = r$ alors on se trouve respectivement dans les **cas de base 1 et 3**.
Si p est tel que $|r-p| < r$ alors par **choix 3** on se ramène à une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$.
Si p est tel que $|r-p| > r$ alors par **choix 1** on se ramène à une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$.

Finalement dans tous les cas le joueur 1 perd ou est amené à une position Z_k avec $k \in \{1, ..., r-1\}$. On en déduit que H_r est vrai.

Conclusion : H_1 est vraie et la propriété est héréditaire. Finalement par principe de récurrence forte on a montré que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ Z_r est un zugzwang.

6 Qui gagne ? Quelle est la stratégie gagnante ?

En conclusion le travail autour des positions Z_r avec $r \in \mathbb{N}^*$ va nous permettre de répondre à la question suivante : “”Dans une partie de position initiale $(a; b)$ avec $a < b$ qui gagne ?”

— Si l'on est initialement dans un cas de base alors le joueur 1 gagne.

— Si l'on est initialement dans une position Z_r alors le joueur 2 gagne.

— Si l'on est dans aucun des cas précédent alors le joueur 1 gagne.

Pour cela on utilise les résultats précédents. D'après la **condition 3** a appartient à une position de zugzwang que l'on notera Z_{r_a}. On peut envisager les deux possibilités $Z_{r_a} = (a; a + r_a)$ ou $Z_{r_a} = (a - r_a; a)$.

— Si $Z_{r_a} = (a - r_a; a)$, alors la partie commencera ainsi :

$$\begin{aligned} (a; b) &\leftarrow J_1 \\ (a; a - r_a) &\leftarrow J_2 \end{aligned}$$

Par **choix 2** la joueur 1 a placé le joueur 2 dans la position de zugzwang Z_{r_a}, le joueur 1 va gagner après un jeu parfait.

— Si $Z_{r_a} = (a; a + r_a)$ alors il y a deux cas de figures.

— Si $b > a + r_a$ alors la partie commencera ainsi :

$$\begin{aligned} (a; b) &\leftarrow J_1 \\ (a; a + r_a) &\leftarrow J_2 \end{aligned}$$

Par **choix 2** la joueur 1 a placé le joueur 2 dans la position de zugzwang Z_{r_a}, le joueur 1 va gagner après un jeu parfait.

— Enfin si $b < a + r_a$ cela signifie que $b - a < r_a$. Par le **choix 3**, le joueur 1 amène le joueur 2 à la position de zugzwang Z_{b-a}, le joueur 1 va gagner après un jeu parfait.

Ceci conclut les discussions stratégiques autour de ce jeu. On peut finir par noter les deux points suivants :

1. Les positions Z_r avec $r \in \mathbb{N}^*$ étant ”statistiquement rares”, le jeu n'est pas équitable et est grandement à l'avantage du joueur 1.
2. La stratégie mise en place dans ce document est une stratégie algorithmique. Trouver les positions Z_r avec r grand n'est pas évident pour un être humain mais la machine en est capable. Un algorithme Python a été implémentée et renvoie ceci :

```
Quel est le nombre de cookies? 139
Quel est le nombre de muffins? 245
La position de départ est  [139, 245]

Les positions Z_r utiles dans cette partie sont les suivantes :

Z_ 1  =  [1, 2]
Z_ 2  =  [3, 5]
Z_ 3  =  [4, 7]
Z_ 4  =  [6, 10]
Z_ 5  =  [8, 13]
Z_ 6  =  [9, 15]
Z_ 7  =  [11, 18]
Z_ 8  =  [12, 20]
Z_ 9  =  [14, 23]
Z_ 10  =  [16, 26]
Z_ 11  =  [17, 28]
Z_ 12  =  [19, 31]
Z_ 13  =  [21, 34]
Z_ 14  =  [22, 36]
Z_ 15  =  [24, 39]
Z_ 16  =  [25, 41]
Z_ 17  =  [27, 44]
Z_ 18  =  [29, 47]
Z_ 19  =  [30, 49]
Z_ 20  =  [32, 52]
Z_ 21  =  [33, 54]
Z_ 22  =  [35, 57]
Z_ 23  =  [37, 60]
Z_ 24  =  [38, 62]
Z_ 25  =  [40, 65]
Z_ 26  =  [42, 68]
Z_ 27  =  [43, 70]
Z_ 28  =  [45, 73]
Z_ 29  =  [46, 75]
Z_ 30  =  [48, 78]
Z_ 31  =  [50, 81]
Z_ 32  =  [51, 83]
Z_ 33  =  [53, 86]
Z_ 34  =  [55, 89]
Z_ 35  =  [56, 91]
Z_ 36  =  [58, 94]
Z_ 37  =  [59, 96]
Z_ 38  =  [61, 99]
Z_ 39  =  [63, 102]
Z_ 40  =  [64, 104]
Z_ 41  =  [66, 107]
Z_ 42  =  [67, 109]
Z_ 43  =  [69, 112]
Z_ 44  =  [71, 115]
Z_ 45  =  [72, 117]
Z_ 46  =  [74, 120]
Z_ 47  =  [76, 123]
Z_ 48  =  [77, 125]
Z_ 49  =  [79, 128]
Z_ 50  =  [80, 130]
Z_ 51  =  [82, 133]
Z_ 52  =  [84, 136]
Z_ 53  =  [85, 138]
Z_ 54  =  [87, 141]
Z_ 55  =  [88, 143]
Z_ 56  =  [90, 146]
Z_ 57  =  [92, 149]
Z_ 58  =  [93, 151]
Z_ 59  =  [95, 154]
Z_ 60  =  [97, 157]
Z_ 61  =  [98, 159]
Z_ 62  =  [100, 162]
Z_ 63  =  [101, 164]
Z_ 64  =  [103, 167]
Z_ 65  =  [105, 170]
Z_ 66  =  [106, 172]
Z_ 67  =  [108, 175]
Z_ 68  =  [110, 178]
Z_ 69  =  [111, 180]
Z_ 70  =  [113, 183]
Z_ 71  =  [114, 185]
Z_ 72  =  [116, 188]
Z_ 73  =  [118, 191]
Z_ 74  =  [119, 193]
Z_ 75  =  [121, 196]
Z_ 76  =  [122, 198]
Z_ 77  =  [124, 201]
Z_ 78  =  [126, 204]
Z_ 79  =  [127, 206]
Z_ 80  =  [129, 209]
Z_ 81  =  [131, 212]
Z_ 82  =  [132, 214]
Z_ 83  =  [134, 217]
Z_ 84  =  [135, 219]
Z_ 85  =  [137, 222]
Z_ 86  =  [139, 225]


Le joueur 1 va gagner avec un jeu parfait.
```